CWI

Centrum Wiskunde & Informatica

Tel uit je winst

Wiskunde in geld en spelen

Vakantiecursus 2009

CWI syllabus 59

CWI Syllabi

Centrum Wiskunde & Informatica (CWI)

P.O. Box 94079, 1090 GB Amsterdam, The Netherlands
Telephone + 31 - 20 592 9333
Telefax + 31 - 20 592 4199
Website http://www.cwi.nl/publications/
Contact: Minnie.Middelberg@cwi.nl

CWI is the nationally funded Dutch institute for research in Mathematics and Computer Science.

Vakantiecursus 2009

Tel uit je winst – Wiskunde in geld en spelen

Syllabus 59

De Vakantiecursus Wiskunde voor leraren in de exacte vakken in VWO, HAVO en HBO en andere belangstellenden is een initiatief van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. De cursus wordt sinds 1946 jaarlijks gegeven op het Centrum Wiskunde & Informatica en aan de Technische Universiteit Eindhoven.

Deze cursus is mede mogelijk gemaakt door een subsidie van de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek.

Omslag: Tobias Baanders

ISBN-10: 90-6196-551-9
ISBN-13: 978-90-6196-551-0
NUGI-code: 811

Printed by GrafiNoord, Assendelft.

Inhoud

Docenten vi

Leden Programmacommissie vii

Jan Aarts
Ten geleide 1

J. van Eijck
Social Software in Vier Voorbeelden 3

Bart Windels
Smeergeld 15

C.W. Oosterlee
Een introductie in financiële producten en markten 36

Peter Stevenhagen
Spelen met groepentheorie 38

Vincent van der Noort
De wiskundige onmogelijkheid van democratie 48

J.A.M. van der Weide
De binomiale boom 59

G. Sierksma
Wiskunde en Sport 68

J.P. Hogendijk
Tijd baart rozen: lijfrentes in Nederland in de 17e en 18e eeuw 86

Docenten

Prof.dr. J.M. Aarts
Technische Universiteit Delft, Faculteit EWI
Postbus 5031, 2600 GA Delft, tel. 015–2126448
Van Kinschotstraat 13, 2614 XJ Delft,
johannesaarts@gmail.com

Prof.dr. J. van Eijck
Centrum Wiskunde & Informatica, Software Engineering
Postbus 94079, 1090 GB, Amsterdam
Jan.van.Eijck@cwi.nl

Dr. B. Windels
Karel de Grote-Hogeschool, Pothoekstraat 125, B-2060 Antwerpen België
Bart.Windels@telenet.be

C.W. Oosterlee
Centrum Wiskunde & Informatica, Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
C.W.Oosterlee@cwi.nl

P. Stevenhagen
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden, Postbus 9512, 2300 RA Leiden
psh@math.leidenunniv.nl

Drs. V. van der Noort
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
Budapestlaan 6, 3584 CD Utrecht
V.vander.Noort@uu.nl

Dr. J.A.M. van der Weide
Faculteit EWI, TUD, Postbus 5013, 2600 GA, Delft
J.A.M.vanderWeide@tudelft.nl

Prof.dr. G. Sierksma
Rijksuniversiteit Groningen, Faculteit Economie en Bedrijfskunde
Postbus 800, 9700 AV Groningen
G.Sierksma@rug.nl

Prof.dr. J.P. Hogendijk
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht en Universiteit Leiden
Postbus Postbus 80.010, 3508 TA, Utrecht
J.P.Hogendijk@uu.nl

Leden Programmacommissie Vakantiecursus

Marian Kollenveld (voorzitter)
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk.
voorzitter@nvvw.nl

Jan van Maanen
Freudenthal Instituut, Aidadreef 12, 3561 GE Utrecht.
maanen@fi.uu.nl

Jan Aarts
Van Kinschotstraat 13, 2614 XJ Delft.
johannesaarts@gmail.com

Ionica Smeets
Mathematical Institute, Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
smeets@math.leidenuniv.nl

Bram van Asch
TUE, Postbus 513, 5600 MB Eindhoven.
a.g.v.asch@tue.nl

Ruud Stolwijk
Cito, Nieuwe Oeverstraat 50, 6801 MG Arnhem.
ruud.stolwijk@citogroep.nl

Marco Swaen
Korteweg de Vries Instituut voor Wiskunde, Universiteit van Amsterdam, Postbus 94248, 1090 GE Amsterdam.
m.d.g.swaen@hva.nl

Kees Oosterlee
Centrum Wiskunde & Informatica, Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam.
C.W.Oosterlee@cwi.nl

Tel uit je winst
Wiskunde in geld en spelen

Jan M. Aarts

Technische Universiteit Delft, Faculteit EWI

In *Lectures on Analysis* beschrijft Gustave Choquet een spel voor twee spelers A en B. Het speelterrein is een topologische ruimte X. De spelers A en B kiezen om beurten een niet-lege open verzameling uit X die telkens moet liggen binnen de laatst gekozen open verzameling. Speler B moet beginnen en kiest dus de open verzamelingen met oneven nummer U_1, U_3, U_5,.... De speler A kiest de verzamelingen met even nummer U_2, U_4, U_6,.... Er geldt $U_i \supseteq U_{i+1}$ voor alle i. De speler A probeert zijn keuzes zo te maken dat de doorsnede van de hele rij niet-leeg is: $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \neq \emptyset$, en A wint als hij daarin slaagt, terwijl speler B zijn best doet om te zorgen dat de doorsnede leeg is, in welk geval hij wint. Dit is een theoretisch spel dat door de Franse wiskundige Choquet is ingevoerd om de topologische eigenschap van Baire ruimte te bestuderen. Het heeft meer te maken met bewijstheorie dan met gewone spelletjes. Zo veel over *spelen in de wiskunde.* Kijken we nu naar *wiskunde in spelen.* We stellen ons op het standpunt van de hoog bemiddelde mens voor wie geld ook een spel is. Daar is eindeloos veel over te vertellen. Deze vakantiecursus, de 63ste, geeft een panoramisch overzicht van wiskunde in spelen.

Volgens sommigen is de huidige financiële crisis een gevolg van het feit dat de kennis van de wiskunde, die nodig is om de financiële transacties succesvol uit te voeren, door de bank genomen onvoldoende is. Daarvan zal bij ons na de lezingen van Prof. Oosterlee en Dr. van der Weide geen sprake meer zijn. **Prof.dr.ir. C.W. Oosterlee** geeft een inleiding in de moderne financiële producten en markten. Dat is eigenlijk louter wiskunde, er komt geen contant geld aan te pas. In nauwe samenhang hiermee vertelt **Dr. J.A.M. van der Weide** over de derivaten, de afgeleide financiële producten, meer in het bijzonder de bepaling van hun prijzen.

De problemen van de pensioenfondsen ten gevolge van de financiële crisis zijn welbekend. De eerste toepassingen van de wiskunde in de financiële wereld zijn berekeningen betreffende levensverzekeringen. Hoe dat begonnen is vertelt **Prof.dr. J.P. Hogendijk** in de lezing *Tijd baart rozen: lijfrentes in Nederland in de* 17^e *en* 18^e *eeuw.*

De lezing van **Dr. B. Windels** met de titel *Smeergeld* gaat nu eens niet over geld, maar over het rekenen met geld als didactisch hulpmiddel. **Prof.dr. P. Stevenhagen** zal laten zien hoe de groepentheorie van pas kan komen bij de

analyse van draai- en schuifpuzzeltjes waarvan de kubus van Rubik een bekend voorbeeld is. Dat wiskunde van nut is bij denkspelletjes is niet zo verwonderlijk. Maar ook bij "gewone"sporten is wiskunde onontbeerlijk. Zo kan wiskunde bijvoorbeeld gebruikt worden voor een real-time analyse van de prestaties van verschillende spelers in een team; en op grond van deze analyse kan de coach een beslissing nemen over de inzet van de reserves.
Prof.dr. G. Sierksma heeft veel onderzoek verricht aan toepassingen van de wiskunde in sport en kan daar heel spannende verhalen over vertellen.

De volgende twee onderwerpen gaan ook over sport, maar je moet daarbij niet denken aan een balletje trappen op de vrije zaterdag. Verkiezingen zijn ook een sport, maar daar komen veel vreemde zaken voor. **Drs. Vincent van der Noort** geeft een inzicht in *verkiezingsparadoxen*. Het blijkt dat geen enkel kiessysteem helemaal eerlijk is, en dat dus volmaakte democratie wiskundig onmogelijk is. **Prof.dr. J. van Eijck** behandelt enkel voorbeelden van social software: het gaat hier over algoritmen die de intermenselijke omgang beschrijven.

Social Software in Vier Voorbeelden

Prof.dr. J. van Eijck
Centrum Wiskunde & Informatica
e-mail: Jan.van.Eijck@cwi.nl

Social software is een paraplu-term voor algoritmen die de intermenselijke omgang proberen te regelen.
Dit soort algoritmen heeft de laatste tijd de aandacht getrokken van logici en informatici. We geven een inleiding in het onderwerp aan de hand van vier voorbeelden. Elk voorbeeld wordt geïllustreerd met een tekening van Marco Swaen.

Voorbeeld 1: Het Salomonsoordeel

Voorbeeld 2: Het probleem van de gecoördineerde actie

Voorbeeld 3: Het ontstaan van kennis en geloof in groepsverband

Voorbeeld 4: De tragedie van het gezamenlijk erfgoed

De tekeningen zijn uit het boek *Discourses on Social Software*, Jan van Eijck en Rineke Verbrugge (eds.), Texts in Logic and Games 5, Amsterdam University Press 2009.

What is Social Software?

Jan van Eijck and Rohit Parikh

It is a sunny autumn day, and our protagonists have taken their meals outside, to enjoy the mild rays of the September sun. The NIAS cook Paul Nolte, as always glowing with pride while serving out his delicious food, has prepared a traditional Dutch meal today with sausage, red cabbage and pieces of apple.

Computer Scientist: Hmmm, very tasty. Do you all realize that for the first time NIAS has opened its gates to the likes of us? Logic and computer science used to be outside the compass of NIAS. Moreover, all of our other colleagues are pursuing goals of their own. They can devote themselves exclusively to their individual academic projects, as the NIAS website puts it, and I must say: I envy them. We are the only ones who are supposed to perform a *collective* task. We have to come up with new ideas in an area that hardly exists, but that is supposed to bridge a gap between the humanities and science. A rather tall order, if you ask me.

Logician: Yes, but you cannot deny that it is very pleasant here. I enjoyed yesterday evening's concert very much, for instance. One can get used to the ways of NIAS; humanities research is carried out here in a very civilized fashion, indeed. The only thing that worries me right now is the vagueness and vastness of our topic. We are supposed to come up with something we can show after our "Games, Action and Social Software" project here finishes. The trouble is that I have only the vaguest of ideas of what social software actually is or might be.

Philosopher: The term "Social Software" was coined by Rohit Parikh, in a paper which appeared in *Synthese* [15]. It had been circulating as a manuscript for some years. Parikh does not give a precise definition but he lists a series of evocative examples, rather in the manner of Wittgenstein in *Philosophical Investigations*. What Parikh has in mind is procedures that structure social reality, in a very broad sense. He makes a plea for investigating these with the tools of mathematics, logic and computer science. This was taken up by various people. See for instance the PhD thesis of Marc Pauly [16] or that of Eric Pacuit [14].

Logician: Now that the term has caught on, I suppose there is little reason for Parikh to come up with a precise definition. Such a definition will cost him the support of people who like his examples but might dislike the way he draws demarcation lines.

Computer Scientist: Yes, I think it is wise not to rely too much on Rohit for a definition. In trying to understand what the term "Social Software" might mean, why not take our cue from computer science? Software is what you feed a computer to make it do something useful. Feeding it with appropriate software turns a computer into a text processor, or into a digital entertainment center. As we all know, the dividing line between hardware (the machine) and software (the programs running on the machine) is blurred by the fact that an increasing number of system tasks are carried out by hardware.

Philosopher: I suppose that drawing the precise line between hardware and software is not that easy, indeed. But couldn't we agree on the following: what can be changed without changing the machine itself is called software?

Logician: Yes, that will do for now. Computer software is roughly divided into *system software*, namely, the software that is needed to make other software run, and *application software*, the software that turns the computer into a tool for a specific task. Taking our lead from computer science, we get the following distinction between social hardware and social software: Social hardware consists of institutions such as schools, churches, law courts, parliaments, banks, newspapers, supermarkets and prisons, while social software consists of the *more specific procedures* followed in these institutions.

Computer Scientist: Most computer software is designed, although if you look at large software systems such as the Linux operating system, then these can certainly be viewed as products of evolution of a certain kind. Genetic algorithms are another example. These are search techniques for finding programs for specific tasks by a process of genesis and natural selection, so programs resulting from a genetic algorithm are not designed.

Philosopher: There is a large class of social practices that have evolved in the course of development of a civilization. Our practice of eating with knife and fork while observing certain rules is one of many examples [8; 9]. Other social practices were designed and redesigned over a long period of time, e.g., the principles of common law.

Computer Scientist: The division of software in two broad categories carries over to the case of social software too, I suppose. Let us call *social system software* the rules of social interaction that make a society civilized. The rule of law, and the rules of civic behaviour that engender mutual trust among social agents.

Philosopher: How did Thomas Hobbes say it? Without social system software our lives would be 'solitary, poor, nasty, brutish, and short.' The theme of *trust* as a quintessential product of social system software has been taken up in our times by Francis Fukuyama [10] and others [6; 20]. No doubt the general principles that constitute aspects of the so-called 'rule of law' [22] would fall under social system software.

Logician: What is it you have in mind?

Philosopher: Let me give some examples. *Nemo judex in sua causa.* This describes the principle of natural justice that no person can judge a case in which he or she is a party. It seems fairly obvious to us, but then again our societies are partly a product of the Roman law system where this principle evolved. Or take *Nulla poena sine lege*, or *Lex retro non agit.* One cannot be penalised for doing something that is not prohibited by law.

Logician: A key principle of law, I suppose, is that nobody shall be judged unheard, which means reasonable opportunity must be given to an accused to defend his side of the case. Without such a principle it is hardly thinkable that a fair jurisprudence could evolve at all.

Computer Scientist: Yes, and other principles no doubt have the purpose of ensuring that court cases can terminate. *Ne bis in idem* is an example of this: no legal action can be instituted twice for the same cause of action.

Philosopher: Another one, one that I have memorized, is *Volenti non fit injuria.* Someone who knowingly and willingly puts himself in a dangerous situation will be unable to sue for his resulting injuries. Comes in handy quite often as an erudite way of saying 'serves him right'. If you go bungee jumping and get injured, you cannot sue the one who supplied the elastic cord.

Computer Scientist: Not everywhere. Some countries require bungee sites to have liability insurance.

Logician: Bungee jumping was just an example, remember. I think we got the point. The main perspective on the law in Dutch society, by the way, seems to be that other basic principle from Roman law: *De minimis non curat lex.* This is taken to mean that the law is not interested in trivial matters. In Dutch society there are many things which are thought not worthy of the law's attention. Possessing less than ten grams of cannabis, for example.

Philosopher: I am afraid we are getting side-tracked here. It is obvious that the foundations and principles of legislation are part and parcel of the broad field of social software. But it is not so clear what *we* have to contribute here. I propose we concentrate instead on the social procedures and protocols geared towards specific tasks, such as division of goods, voting, reaching agreement, negotiation, settling disputes, that kind of thing. Let us focus on what one might call *social application software.*

Computer Scientist: Fair division of goods is an excellent example. For the fair division between two people we have what in English is called *I cut, you choose.* In Dutch this is called *kiezen of delen.* This is the procedure where one person makes the division, and the other person has the right to choose one of the pieces. Apparently, this is known from antiquity. It appears in a famous medieval story, 'Charlemagne and the Elbegast' [7].

Philosopher: A rather peculiar version of this was used by King Solomon in the Old Testament. He took the 'I cut' quite literally, in his proposal to settle a dispute between two women about a baby. He threatened to cut the child in half.

Computer Scientist: The case of Solomon and the two women is interesting, for it has been noticed that Solomon's procedure hinges on the surprise element. Suppose Solomon has to settle a second dispute about a child between two women, while his first judgement is well known. Surely, the second pair of women would *both* say that they prefer the other to have the child than for him to die.

Philosopher: Yes, the surprise element is crucial for Solomon's procedure to work. If the impostor knows the procedure, she will be able to play strategically, by pretending she is also willing to give up the child. Almost all social procedures are susceptible to strategic behaviour, where it pays not to act according to your real preferences.

Computer Scientist: If you ask people to invest real money, you can always force them to reveal their real interests, I suppose. In a second dispute about a child, Solomon would simply propose to sell the baby to the highest bidder, knowing that she had to be the real mother.

Logician: Beforehand he should offer them both a generous loan from the Temple funds, to be paid back in monthly installments plus interest. And this time the rules can be publicly announced: bids in closed papyri, highest bidder gets the baby at the offered price, loser pays a fee into the Temple funds to cover court expenses.

Philosopher: This might not work if the pretender has more money than the true mother. Better to ask them how many times their annual income they are willing to bid for the child.

Computer Scientist: If the bids are in closed papyri, and the first mother offers A times her annual income and the second mother B times her annual income, with $A > B$, then the child should go to the first mother for B times *her* annual income. For this is what she would have paid in an open auction, with the second mother (the 'fake' mother) dropping out at B times annual income.

Philosopher: This is called a *sealed bid second price auction*, isn't it? Such auctions are strategy-proof, in the sense that it is never in the interest of the bidders to put in a lower bid than what they believe is the true value.

Logician: Yes, such an auction would work in this case. In fact, a variation on this solution was proposed in the literature: see Moore [13] (and also [17]). Suppose the child is worth A times her annual income for the real mother, and B times her annual income for the pretender, with $A > B$. Now the women make their bids in sealed papyri, and Solomon collects the papyri without looking at who handed them in. He announces his procedure to the women. If one of them gives the child to the other, he will consider the case settled. If not, then he will toss a coin to decide who gets the child, and (looking at the bids) rule that that woman will have to pay M times her annual income, with $A > M > B$, and the other woman will have to pay a small fine.

Philosopher: Court expenses again.

Logician: Yes. Solomon then asks the first woman whether she is willing to give the child to the second woman. If so, all is over and done with. If not, he asks the second woman whether she is willing to give the child to the first woman. If so, all is over and done with. If not, he tosses his coin, decides who gets the child, and both women pay expenses as stipulated: the woman who gets the child pays M times her annual income, and the other woman pays the fine.

Computer Scientist: Ah, I see how this works. If the first woman is not the true mother, she knows she is running the risk of having to pay more than the child is worth to her. She has offered B times her annual income, but if she gets the child she will have to pay more than that, and if she does not get the child she will have to pay a fine. So she will give it up. If the first woman is the true mother, the second woman will know that she is running the risk of ending up with the child at a price she does not want to pay, or ending up with nothing and having to pay a fine. So then *she* will give it up. If both act rationally, the true mother gets the child, at no cost at all. How brilliant!

Philosopher: I suppose it is essential that Solomon announces the price M for the winner and the small fine for the loser beforehand. Then both women know that the other one knows what might happen.

Logician: Yes, and note that the procedure assumes that the women are both rational, and know of each other that they are rational. If the pretender acts irrationally by refusing to give up the child — ‘I will never part with my darling, I just can’t, and to hell with the cost’ — then she could end up having the child after all.

Computer Scientist: The Solomon case is special because the goods are non-divisible. With divisible goods, real money always makes for smoother fair division, I suppose. Here is a procedure for dividing an inheritance between n inheritors: first auction the goods among the n inheritors, next divide the auction revenue in n equal shares.

Philosopher: This may not be a fair procedure if some of the inheritors are much poorer than the others.

Computer Scientist: OK, but how about the following procedure. This is a simple generalization of *I cut, you choose* to the case of n participants.

> I cut out a piece of the inheritance that I know I am satisfied with and offer it to the others. If someone else wants it, I give it to him, and we continue with $n-1$ players. If no-one else wants it, I take it myself and let the other players continue.

Doesn't this guarantee that everyone gets his fair share? So what's the big deal about cake cutting algorithms?

Philosopher: In the literature [4; 3] it is common practice to use cake cutting as a metaphor for a *division of a single heterogeneous good*. Dividing a piece of land at inheritance would be an example. The cake has different toppings that cannot all be cut into pieces with the same composition: it may have turkish delight cherries on top that someone likes but another person abhors, and so on. A cake division is *simply fair* if each of n players feels she received at least $1/n$ of the cake, according to her individual valuation of its parts, that is. I agree that the procedure you propose is simply fair, but your procedure does not rule out the possibility of hard feelings. A cake division is called *envy-free* if each person feels that nobody else received a larger piece. A sure sign of a division being envy-free is that nobody wishes to trade pieces with anyone else. The procedure you propose is not envy-free.

Computer Scientist: Ah, I see what you mean. The procedure guarantees that I get what I consider a fair share, but it does not rule out that someone else gets a share that I consider excessive. This explains, by the way, why fair, envy-free division among two is so much simpler than fair, envy-free division among many. If I have received my fair $1/n$ share, I can still be envious because I feel that some of the other $n-1$ pieces are larger than mine. The *I cut, you choose* procedure is fair, and it is envy-free simply because the rest of the cake is a single piece, so there is no possibility for envy.

Logician: If the preferences of the players are not the same, then I suppose the typical result of fair division will be that all players feel they have received *more* than their fair share. In fair division there is no objectivity, remember.

Computer Scientist: And if the division is also envy-free then each player will feel that she has done at least as well as each of the others. A very satisfactory outcome indeed.

Philosopher: Yes, but it is surprisingly difficult to generalize *I cut, you choose*. One of the difficulties, by the way, is that preferences might change while the division is in progress. Consider the case of a land inheritance where you have picked your piece of land. Then the piece of land next to yours has increased in value for me, because of the attractive prospect of having you as my neighbour.

Computer Scientist: You are teasing me, but I take your point. But wait, didn't Rohit's social software paper [15] have a discussion of cake cutting?

Logician: Ah, you mean the Banach and Knaster cake cutting algorithm? That is indeed a good example. It goes like this.

> I cut a piece intended for myself. All others consider it. If nobody objects, I get my piece. If someone raises an objection, she has the right to cut off a slice and put that back with the rest of the cake. She then asks if she can have the reduced piece. If nobody objects, she gets it, otherwise someone else takes the knife and reduces the piece a bit further, and so on, until someone gets the trimmed piece. Then on to the next round, with $n-1$ players.

Computer Scientist: A nice feature about Parikh's discussion is that he shows how the methods of computer science can be used to argue that the procedure is fair. The key ingredient of the procedure is a loop operation:

> continue to trim the piece until there are no further objections about the size.

If r stands for the action of trimming, and if $F(m, k)$ is the proposition that the main part of the cake is large enough for k people, then we can see that $F(m, k)$ is invariant under the action r. If $F(m, k)$ is true before r, then it will still be true after r has occurred. Clearly, if one can show that $F(m, k)$ continues to hold through the algorithm, for k running through $n, \ldots, 1$, then this establishes that the division is fair, for surely $F(m, n)$ holds at the beginning: the whole cake is large enough for the whole group to begin with.

Logician: Yes, and if I remember well, Parikh proposes a game logic to carry out the verification. Don't you think, by the way, that an additional argument would be needed for envy-freeness?

Philosopher: Yes, I think you are right. But what I don't like about the algorithm is the way it spoils the cake. You were looking forward to a treat, and you end up with an unappetizing mush of cake, cream and topping.

Logician: There is also a version with a continuously moving knife. This leaves the cake intact. See [11].

Philosopher: Ah, I take that to mean that we, as social software designers, are allowed to propose improvements on social division procedures. Then how about the following?

> I start by cutting off a piece intended for myself. All others consider it, and are allowed to make money offers on it. If nobody does, I get the piece, without paying for it. Otherwise, it is auctioned to the highest bidder among those who have not yet been served cake, and the money is put in a pile. And so on, until everybody has been served. After that, the pile of money is split evenly among the participants.

Note that it is assumed here that cake cutting is difficult, but splitting an amount of money is easy. What do you guys think: is this a fair and envy-free procedure?

Logician: We should be able to tackle this with Parikh's logic, I suppose. But before we do that, it might be wise to have a look at the vast literature on this matter [4; 3; 2; 18; 21].

Philosopher: Yes, and let's not forget that rational action and the investigation of rationality is a classical theme in philosophy. Let me tell you a wonderful Indian story about the Mughal emperor Akbar and his minister Birbal [19] about the way in which knowledge and incentives affect a social algorithm. Birbal had asserted to the emperor that all wise (or clever) people think alike.

Logician: And then the emperor challenged him, right?

Philosopher: Right, so he suggested the emperor to order all men in Agra, the capital, to come at night to the palace grounds, and pour one potful of milk in the pool there, which was covered by a white sheet. The punishment for not doing so was severe, so one by one, all the residents of Agra came at night and poured a potful in the pool. And when the sheet was removed in the morning, it turned out that the pool was entirely full of water.

Logician: Of course.

Philosopher: Yes, and Birbal could explain to the emperor how this had to come about. "Your majesty, each man thought that if he, and he alone, would pour water instead of milk, it would not make much difference, and no one would notice. So they all did just that, for all your subjects are rational. And that's why your pool is full of water."

Computer Scientist: How wonderful!

Philosopher: By the way, there also is a story where Birbal acts exactly like Solomon. In the Hindu version, Ramu and Shamu claimed ownership of the same mango tree, and decided to ask Birbal to settle the dispute. Birbal's verdict: "Pick all the fruits on the tree and divide them equally. Then cut down the tree and divide the wood." Ramu thought this was fair but Shamu was horrified, and Birbal declared Shamu the true owner.

Computer Scientist: It may interest you that Birbal's milk-pouring experiment was repeated by the psychologist Dan Batson, and with the same outcome. What Batson and his co-workers did [1] was set up a Birbal-like situation, where the subject was asked to flip a coin in private. The outcome of the coin toss was supposed to decide whether she herself or her team-member was scheduled for some unpleasant task. In collecting the results it turned out that these contradicted the laws of probability: more than 90 per cent of the subjects allotted the unpleasant task to their team member.

Philosopher: Why am I not surprised?

Computer Scientist: But the interesting thing was that all these cheating subjects duly reported that they had reached their decision in a fair way. Batson then tried to find out what incentive was needed to force the subjects to behave more honestly. It turned out that giving firm instructions about fairness and next placing them in front of a mirror was the only way to enforce ethical behaviour. Mind you, the subjects were psychology students, no doubt familiar with the one way mirror.

Logician: So what Batson was studying was not rational behaviour but the phenomenon of moral hypocrisy: our common tendency to believe ourselves to be more ethical than we truly are.

Computer Scientist: What still puzzles me about the Akbar and Birbal story is this: why did each of the cheating water pourers believe that he was the only cheater?

Logician: Well, they did as we all do, I suppose. They knew it didn't matter as long as they were not found out, so they gave it no further thought.

Computer Scientist: In any case, the story illustrates that reflection on social algorithms has a long history.

Philosopher: There is no doubt that the Akbar and Birbal stories go back a long time: emperor Akbar the Great ruled the Mughal Empire in the second half of the sixteenth century.

Computer Scientist: We talked briefly about auctions in connection with the

Solomon verdict. The study of auctions and their properties is part of an discipline called *mechanism design*. Surely, this also belongs to social software. You can find an overview in economics textbooks. See, e.g., Chapter 23 of [12]. Mechanism design deals with the problem of aligning agents's preferences so that the decision taken by the central authority is beneficial for the society. The best known example of a mechanism is that of a Vickrey auction, according to which the winner in a sealed-bid auction has to pay a price equal to the second highest bid.

Logician: Yes, we talked about that before.

Computer Scientist: Another area in social software where there is already a long and established tradition is voting theory. The mathematical study of voting procedures was started by Condorcet in the eighteenth century [5], and the literature has grown ever since. We surely know a lot about the advantages and disadvantages of different voting schemes.

Philosopher: It is interesting to reflect upon what motivated Condorcet to study voting procedures in the first place. He was struck by the fact that majority voting does not always lead to results that represent what the voters truly wish. A dangerous concept, by the way, but we will let that pass for now. In one and the same election, it is possible that a majority prefers A over B, another majority prefers B over C, and a third majority prefers C over A. Majority preference is not transitive, and this is a flaw. Therefore, Condorcet proposes to start from pairwise comparisons between all alternatives. The Condorcet winner is the choice that beats all alternatives in pairwise comparisons.

Computer Scientist: Condorcet proposed organizing elections like chess tournaments. Not a very practical way to elect the president of France or the United States, if you ask me. Also, it is unfortunate that a Condorcet winner need not exist.

Philosopher: Not very practical for large-scale elections, indeed. And you are right that there is not always a Condorcet winner. Condorcet was aware of these facts, of course. But it is getting a bit chilly. May I propose we go inside and try to get some work done? Tomorrow, or at some later time, we can continue our discussion. Maybe we should try to come up with areas of social software where our combined expertise might make a difference.

Computer Scientist and Logician: Good idea. Let's think about it, and continue some other time.

References

[1] C.D. Batson, E.R. Thompson, G. Seuferling, H. Whitney, and J.A. Strongman. Moral hypocrisy: appearing moral to oneself without being so. *Journal of Personality and Social Psychology*, 77(3):525–537, 1999.

[2] S. J. Brams and A. D. Taylor. *The Win-Win Solution*. W. W. Norton, New York, 1999.

[3] S.J. Brams and A.D. Taylor. *Fair Division: From Cake-Cutting to Dispute-Resolution*. Cambridge University Press, 1996.

[4] Steven Brams. Fair division. In Barry R. Weingast and Donald Wittman, editors, *Oxford Handbook of Political Economy*. Oxford University Press, 2005.

[5] Nicolas de Condorcet. *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*. Imprimerie Royale, Paris, 1785.

[6] Karen S. Cook. *Trust in Society*. Russell Sage Foundation Publications, 2003.

[7] A.M. Duinhoven and K. Eykman. *Karel ende Elegast*. Nederlandse Klassieken Reeks. Prometheus and Bert Bakker, Amsterdam, 1997. Translation in modern Dutch. The 1486-1488 version in Middle Dutch can be found on `http://www.dbnl.org/tekst/_kar001kare01_01/`.

[8] Norbert Elias. *The Civilizing Process, Vol.I. The History of Manners*. Blackwell, Oxford, 1969.

[9] Norbert Elias. *The Civilizing Process, Vol.II. State Formation and Civilization*. Blackwell, Oxford, 1982.

[10] Francis Fukuyama. *Trust: The Social Virtues and The Creation of Prosperity*. Free Press, 1996.

[11] Martin L. Jones. A note on a cake cutting algorithm of Banach and Knaster. *The American Mathematical Monthly*, 104(4):353–355, April 1997. doi:10.2307/2974584.

[12] A. Mas-Collel, M. Whinston, and J. Green. *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, 1995.

[13] J. Moore. Implementation, contracts, and renegotiation in environments with complete information. In J.-J. Laffont, editor, *Advances in Economic Theory — 6th World Congress*, volume I, Cambridge, 1992. Cambridge University Press.

[14] Eric Pacuit. *Topics in Social Software: Information in Strategic Situations*. PhD thesis, City University of New York, 2005.

[15] R. Parikh. Social software. *Synthese*, 132:187–211, 2002.

[16] Marc Pauly. *Logic for Social Software*. PhD thesis, ILLC, Amsterdam, 2001.

[17] Marc Pauly. Changing the rules of play. *Topoi*, 24:209–220, 2005.

[18] Jack Robertson and William Webb. *Cake-Cutting Algorithms: Be Fair If You Can*. A.K. Peters, 1998.

[19] Amita Sarin. *Akbar and Birbal*. Penguin India, 2005.

[20] Adam B. Seligman. *The Problem of Trust*. Princeton University Press, 2000.

[21] Jiri Sgall and Gerhard J. Woeginger. An approximation scheme for cake division with a linear number of cuts. *Combinatorica*, 27(2):205–211, 2007.

[22] Brian Z. Tamanaha. *On the Rule of Law*. Cambridge University Press, 2004.

Paradoxen in de wiskunde

Stijn Symens, Universiteit Antwerpen
Bart Windels, Karel de Grote-Hogeschool Antwerpen

1 Een baldadige paradox

Ik was twee keer niet geslaagd voor wiskunde, omdat ik de zin van kanstheorie echt niet inzie. Ik bedoel, wat kan het jou toch schelen of je een zwarte of een witte bal uit een zak trekt? Bovendien, als je die kleur dan toch zo belangrijk vindt, laat het dan niet aan het toeval over; kijk in die stomme zak en neem de kleur die je wil.
Stephanie Plum in *Hard Eight*.

In een zak zit een witte of een zwarte bal. We weten niet welke kleur, maar elke kleur heeft evenveel kans om in de zak te zitten. Jeroentje steekt een witte bal in de zak. Daarna trekt hij een willekeurige bal uit de zak en dat blijkt een witte bal te zijn. Wat is de kans dat de overblijvende bal in de zak ook wit is?

Men zou kunnen redeneren dat door het toevoegen en daarna weer verwijderen van een witte bal de oorspronkelijke situatie is hersteld. Er is dan nog een bal over en de kans dat het een witte bal is, is $\frac{1}{2}$.

Deze redenering is echter foutief. Veronderstel dat er in het begin ofwel een zwarte bal Z ofwel een witte bal W1 in de zak zit. Daarbij voegt Jeroentje een witte bal W2. Hij schudt de zak en — zonder een bal uit de zak te nemen — rangschikt hij de ballen in de zak zodat één bal dicht bij de opening van de zak zit (bal 1) en de andere bal dieper in de zak (bal 2). Er zijn nu vier mogelijkheden, met gelijke waarschijnlijkheid:

bal 1	bal 2
Z	W1
W1	Z
W1	W2
W2	W1

Dan verwijdert Jeroentje bal 1 uit de zak. Dit blijkt een witte te zijn. Dat betekent dat de eerste mogelijkheid (bal 1 is Z en bal 2 is W1) niet voorkomt. De drie andere gevallen zijn wel mogelijk en hebben nog steeds dezelfde waarschijnlijkheid. Men ziet: in twee van de drie gevallen is bal 2 ook een witte bal. De kans dat de overblijvende bal in de zak een witte bal is, is dus $\frac{2}{3}$.

2 Een familiale paradox

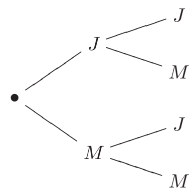
De belangrijkste vragen in het leven zijn, voor het grootste deel, eigenlijk problemen uit de kanstheorie.
Pierre-Simon de Laplace in *Théorie Analytique des Probabilités*.

Hebben mannen meer zussen dan vrouwen?

Neem een gezin met twee kinderen, een jongen en een meisje. De jongen heeft een zus, het meisje niet. In een gezin met drie kinderen, een jongen en twee meisjes, heeft de jongen twee zussen en elk van de meisjes slechts één zus. Op het eerste gezicht lijken deze voorbeelden te illustreren dat jongens meer zussen hebben dan meisjes. Inderdaad, de meisjes zelf worden uitgesloten bij het tellen van zussen, terwijl voor de jongens alle meisjes als zus tellen.

Maar deze conclusie is niet juist. Mannen hebben, gemiddeld gesproken, evenveel zussen als vrouwen. In een gezin met juist één kind is dit alvast waar: of het nu om een meisje of een jongen gaat, hij/zij heeft geen zus.

■ ■ ■ Voorbeeld 1 Een gezin met twee kinderen



Formeler: we tellen het aantal koppels (a, b) waarvoor a een zus is van b.

In een gezin met twee kinderen, kunnen er twee jongens, twee meisjes of een jongen en een meisje zijn. De laatste mogelijkheid komt twee keer zoveel voor, zoals onmiddellijk volgt uit een kansboom van de geboortes. Als we in de vier gevallen het aantal zussen van jongens en het aantal zussen van meisjes tellen, vinden we

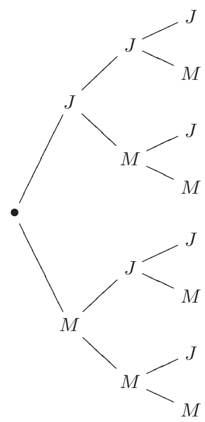
	aantal zussen van een jongen	aantal zussen van een meisje
JJ	0	0
JM	1	0
MJ	1	0
MM	0	2
totaal	2	2

Er zijn dus evenveel zussen van jongens als zussen van meisjes. Jongens hebben dus evenveel zussen als meisjes in gezinnen met twee kinderen.

■ ■ ■

Dezelfde conclusie is waar in een gezin met drie kinderen.

■ ■ ■ Voorbeeld 2 Een gezin met drie kinderen



Als we opnieuw het aantal zussen van jongens en het aantal zussen van meisjes tellen, vinden we

	aantal zussen van een jongen	aantal zussen van een meisje
JJJ	0	0
JJM	2	0
JMJ	2	0
JMM	2	2
MJJ	2	0
MJM	2	2
MMJ	2	2
MMM	0	6
totaal	12	12

Er zijn dus opnieuw evenveel zussen van jongens als zussen van meisjes. Jongens hebben dus evenveel zussen als meisjes in gezinnen met drie kinderen. ■ ■ ■

3 De paradox van Simpson

Het waarschijnlijke is wat meestal gebeurt.
Aristoteles (384–322 v.C.)

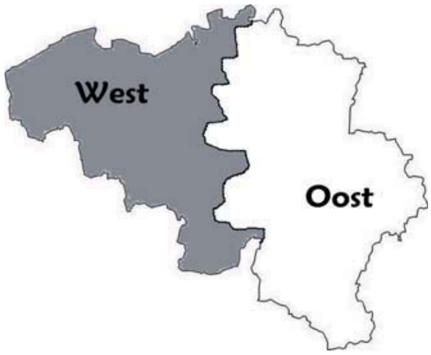
De zogenaamde *paradox van Simpson* is een puur algebraïsche schijnbare tegenspraak. Hij duikt in allerlei contexten op, zoals uit volgende voorbeelden blijkt.

■ ■ ■ Voorbeeld 3 Werkloosheidscijfers

Een federaal land is onderverdeeld in twee delen: het Westen en het Oosten. In beide landsdelen heerst een grote werkloosheid, zoals aangegeven in volgende tabellen (in duizendtallen). De federale regering tracht op basis van deze gegevens te beslissen welk landsdeel de meeste overheidssteun moet ontvangen.

West	diensten	industrie
actieve bevolking	1650	1350
werklozen	375	450

Oost	diensten	industrie
actieve bevolking	1050	2100
werklozen	225	675



Een eerste commissie gaat als volgt te werk. Door de verhouding van het aantal werklozen en de actieve bevolking te berekenen, vinden we de volgende werkloosheidsgraden in West en Oost per sector.

West	diensten	industrie
werkloosheid	22,73 %	33,33 %

Oost	diensten	industrie
werkloosheid	21,43 %	32,14 %

Zowel in de dienstensector als in de industrie is de werkloosheidsgraad in het Westen hoger dan in het Oosten. De eerste commissie beslist daarom dat West iets meer overheidssteun moet krijgen dan Oost.

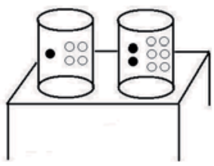
Een tweede commissie maakt geen onderscheid tussen diensten en industrie. Zij vinden de volgende cijfers

West	allen
actieve bevolking	3000
werklozen	825

Oost	allen
actieve bevolking	3150
werklozen	900

Zij komen tot een werkloosheidsgraad van $27{,}57$ % voor het Westen en $28{,}50$ % voor het Oosten. De tweede commissie beslist daarom dat Oost iets meer overheidssteun moet krijgen dan West. Dit is net de omgekeerde beslissing als bij de eerste commissie. ■ ■ ■

■ ■ ■ Voorbeeld 4 Ballenbak

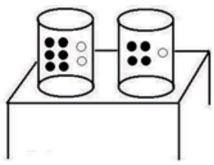


tafel 1

Op twee tafels staan telkens twee bakken met zwarte en witte ballen.

In de linkse bak van de eerste tafel zitten 5 ballen waarvan 1 zwarte. In de rechtse bak van de eerste tafel zitten 8 ballen, waarvan 2 zwarte. De kans om een zwarte bal te trekken is dus groter in de rechts bak, omdat

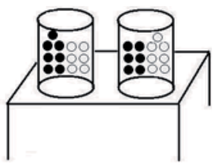
$$\frac{1}{5} < \frac{2}{8}.$$



tafel 2

In de linkse bak van de tweede tafel zitten 8 ballen, waarvan 6 zwarte. In de rechtse bak van de tweede tafel zitten 5 ballen waarvan 4 zwarte. De kans om een zwarte bal te trekken is dus opnieuw groter in de rechtse bak, omdat

$$\frac{6}{8} < \frac{4}{5}.$$



tafel 3

Als de twee linkse bakken in één bak worden samengevoegd die links op een derde tafel staat en ook de twee rechtse bakken in één bak worden samengevoegd die rechts op de derde tafel staat, dan wordt de kans om een zwarte bal te trekken plots groter (!) in de linkse bak dan in de rechtse bak. Immers, in de linkse bak zitten 13 ballen, waarvan 7 zwarte en in de rechtse bak zitten ook 13 ballen, waarvan slechts 6 zwarte, en

$$\frac{7}{13} > \frac{6}{13}.$$

■ ■ ■

Voorbeelden 3 en 4 tonen aan dat voor sommige gehele getallen a, b, c, d, A, B, C, D geldt dat

$$\frac{a}{b} < \frac{A}{B} \quad \text{en} \quad \frac{c}{d} < \frac{C}{D}$$

én dat

$$\frac{a+c}{b+d} > \frac{A+C}{B+D}.$$

In voorbeeld 3 is a het aantal werklozen uit de diensten in Oost, b de actieve bevolking uit de diensten in Oost, A het aantal werklozen uit de diensten in West, B de actieve bevolking uit de diensten in West, c het aantal werklozen uit de industrie in Oost, d de actieve bevolking uit de industrie in Oost, C het aantal werklozen uit de industrie in West en D de actieve bevolking uit de industrie in West.

In voorbeeld 4 stellen a, A, c en C de hoeveelheid zwarte ballen voor in elke bak en b, B, d en D de totale hoeveelheid ballen in elke bak.

Er is hier dus geen sprake van een echte paradox, maar hooguit van een onverwacht resultaat: verhoudingen zijn niet additief. Toch wordt dit verschijnsel door velen als “in tegenstrijd met de intuïtie” ervaren, en het krijgt daardoor de naam *Paradox van Simpson*.

De paradox van Simpson wordt genoemd naar Edward Simpson, die deze beschrijft in een artikel uit 1951. De paradox werd in het begin van de twintigste eeuw echter al beschreven door Yule.

Merk op dat er wél geldt dat

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{c+d} < \frac{c}{d}.$$

Het paradox van Simpson komt soms op nog minder opvallende plaatsen terug, zoals volgend voorbeeld illustreert.

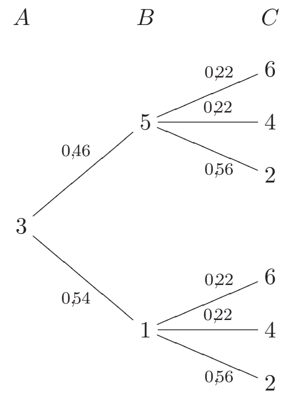
■ ■ ■ Voorbeeld 5 Keuze van een geneesmiddel

Er zijn twee geneesmiddelen op de markt, A en B, die kunnen worden gebruikt om een bepaalde aandoening (al dan niet volledig) te genezen. De efficiënte werking van de geneesmiddelen wordt beoordeeld op een schaal van 1 tot 6, waarbij 1 de kleinste efficiëntie voorstelt en 6 de grootste efficiëntie. Uit onderzoek blijkt dat geneesmiddel A voor alle patiënten een score 3 verdient. Geneesmiddel B werkt niet voor alle patiënten even goed. In 54 % van de gevallen verdient B de score 1, in 46 % van de gevallen verdient B een score 5.

Een dokter die twijfelt tussen beide geneesmiddelen, vraagt zijn vriend de wiskundige om advies. Welk middel heeft de grootste kans om het meest effectief te zijn? De wiskundige antwoordt: “Aangezien A in 54 % van de gevallen het meest effectief is, is A de beste keuze. A is beter dan B.”

Later komt er een derde geneesmiddel C op de markt. Uit onderzoek blijkt dat de patiënten zeer verscheiden op dit nieuwe product reageren. In 22 % van de gevallen scoort geneesmiddel C een 6, in 22 % van de gevallen scoort C een 4 en in 56 % van de gevallen is de score slechts 2.

De dokter raadpleegt opnieuw zijn vriend de wiskundige. Welk middel heeft de grootste kans om het meest effectief te zijn? De wiskundige stelt een kansboom op.



kans	beste
0,1012	C
0,1012	B
0,2576	B
0,1188	C
0,1188	C
0,3024	A

Hieruit blijkt dat

$$\begin{array}{lrl} \text{P}(A \text{ is best}) = & & = 0{,}3024 \approx 30\% \\ \text{P}(B \text{ is best}) = & 0{,}1012 + 0{,}2576 & = 0{,}3588 \approx 36\% \\ \text{P}(C \text{ is best}) = & 0{,}1012 + 0{,}1188 + 0{,}1188 & = 0{,}3388 \approx 34\% \end{array}$$

De wiskundige antwoordt daarom: “Nu er een nieuw geneesmiddel C op de markt is, is geneesmiddel B het meest effectief en geneesmiddel A is het minst effectief.” Dit is precies de omgekeerde conclusie als voorheen! ■ ■ ■

4 De liftenparadox

Men heeft aangetoond dat de kennis van kansen ons op geen enkele manier helpt om juiste conclusies te trekken, en dat er geen rechtstreeks verband is tussen de waarheid van een uitspraak en haar waarschijnlijkheid. Kansen beginnen en eindigen met kansen.
John Maynard Keynes (1883-1946)

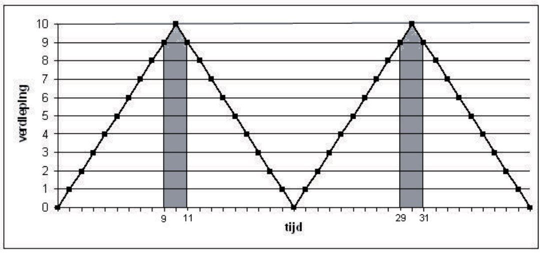
Elke dag gaat meneer De Clercq werken in een kantoorgebouw met 10 verdiepingen. Bij aankomst gaat hij — met de enige lift — naar het kantoor van zijn chef, dat zich op de 9de verdieping bevindt. Zijn chef geeft hem opdrachten voor de dag en dan gaat meneer De Clercq — met de lift — naar het kantoor van zijn secretaresse, dat zich op de 1ste verdieping bevindt. Daarna gaat hij — met de lift — opnieuw naar boven, naar zijn eigen werkplek op de 9de verdieping.

Meneer De Clercq is zeer ongeduldig en drukt altijd op beide liftknopjes (om naar boven én om naar beneden te gaan), dus komt er niet steeds de lift die hij eigenlijk nodig heeft. Dat zou hij niet erg vinden, ware het niet dat steeds de “verkeerde” lift verschijnt. Hij beweert dat, wanneer hij op de 9de verdieping staat te wachten om naar beneden te gaan, in 9 van de 10 gevallen een lift verschijnt die naar boven gaat. Tot zijn ergernis is het bovendien ook zo dat, wanneer hij op de 1ste verdieping staat te wachten om naar boven te gaan, in 9 van de 10 gevallen een lift verschijnt die naar beneden gaat!

Celui qui a entendu la même chose de 12 000 témoins oculaires a seulement 12 000 probabilités, ce qui équivaut à une forte probabilité, ce qui est loin d'être certain.
Voltaire (1694-1778)

De intuïtie van meneer De Clercq is echter juist. Wellicht is het inderdaad zo dat op de 9de verdieping de lift vaker naar boven dan naar beneden zal blijken te gaan. En van op de 1ste verdieping blijkt de lift vaker naar beneden dan naar boven te gaan.

We kunnen de situatie als volgt modelleren. Omdat er heel veel gebruik gemaakt wordt van de lift, mogen we veronderstellen dat hij steeds tussen het gelijkvloers en de tiende verdieping pendelt en op elke verdieping stopt. Als we de tijd om in en uit te stappen verwaarlozen en de tijd tussen twee verdiepingen als eenheid kiezen, dan wordt de plaats van de lift door volgende grafiek beschreven.



In deze grafiek stellen we het volgende vast over het gedrag van de lift bekeken vanop de negende verdieping.. Als meneer De Clercq tussen $t = 9$ en $t = 11$ aankomt, zal de lift naar beneden gaan. Dat geldt ook tussen $t = 29$ en $t = 31$, enzovoort (grijs gebied). Als meneer De Clercq tussen $t = 0$ en $t = 9$ arriveert, zal de lift naar boven gaan eens hij op de 9de verdieping komt. Dat geldt ook tussen $t = 11$ en $t = 29$, enzovoort (wit gebied).

Als we aannemen dat meneer De Clercq op een willekeurig tijdstip aan de lift aankomt, dan blijkt dus dat in 90 % van de gevallen de lift naar boven beweegt als hij op de negende verdieping komt.

Precies dezelfde redenering geldt voor het gedrag op de eerste verdieping.

5 De verjaardagsparadox

Het huwelijk is geen loterij. In een loterij kan je tenminste sóms eens winnen.
George Bernard Shaw

Wat is de kans dat in een groep van 30 mensen er twee van hen op dezelfde dag jarig zijn?

De meeste mensen schatten deze kans veel te laag in. Wellicht laten zij zich leiden door de kleine kans dat zijzelf, als ze deel uitmaken van een groep van 30 personen, op dezelfde dag verjaren als iemand anders uit de groep. Echter, het aantal de paren waartoe een vaste persoon behoort, is slechts een fractie van het aantal paren uit de hele groep.

We zoeken eerste de kans dat 30 mensen allen een verschillende verjaardag hebben. Het aantal mogelijke keuzen van 30 verschillende dagen is

$$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \cdots \cdot 336 \qquad \text{(30 factoren)}$$

Voor de eerste verjaardag kunnen we immers 365 verschillende datums kiezen, voor de tweede blijven er nog 364 datums over, voor de derde 363, enzovoort. Het aantal mogelijke keuzen van 30 (niet noodzakelijk verschillende) verjaardagen is

$$365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \cdots \cdot 365 \qquad \text{(30 factoren)}$$

De kans op 30 verschillende verjaardagen is dus

$$\frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \cdots \cdot 336}{365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \cdots \cdot 365} = 0{,}2936\ldots$$

De kans dat dit niet gebeurt, en dat er minstens twee mensen op dezelfde dag hun verjaardag vieren, is dus

$$1 - 0{,}2936\ldots = 0{,}7063\ldots$$

hetgeen meer is dan de intuïtie van de meeste mensen.

Merk op dat met een beetje computeralgebra de bovenstaande kans eenvoudig kan worden berekend. Immers:

$$1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \cdots \cdot 336}{365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \cdots \cdot 365} = 1 - \frac{365!}{335! \cdot 365^{30}}.$$

Als de groep groter wordt dan 30 personen, dan worden de kansen spectaculair groot.

n	kans op twee dezelfde verjaardagen in een groep van n personen
10	$0{,}116948177\ldots$
20	$0{,}411438383\ldots$
30	$0{,}706316242\ldots$
40	$0{,}891231809\ldots$
50	$0{,}970373579\ldots$
60	$0{,}994122660\ldots$
100	$0{,}999999692\ldots$

6 Logische paradoxen

De paradoxen die we tot hiertoe bespraken, waren paradoxen die we in het dagelijks leven kunnen tegenkomen en ons een gevoel geven dat er iets niet klopt.

Logische paradoxen echter, gaan er van uit dat er bij het beslissen of een bepaalde uitspraak waar is of niet waar is, er een tegenstrijdigheid bestaat.

■ ■ ■ Voorbeeld 6 De uitspraak is waar, dus niet waar

Op een kaart staat langs beide kanten een zin opgeschreven:

De uitspraak op de andere kant van deze kaart is waar.	De uitspraak op de andere kant van deze kaart is niet waar.
voorkant	achterkant

We vragen ons nu af of de zin op de voorkant al dan niet een ware uitspraak is.

Is de uitspraak op de voorzijde waar, dan is die op de achterzijde waar en dan is die op de voorzijde niet waar.

Is de uitspraak op de voorzijde niet waar, dan is die op de achterzijde niet waar en dan is die op de voorzijde waar.

Dit is een type-voorbeeld van een logische paradox. Het is een bepaalde uitspraak die niet waar, noch onwaar kan zijn.

"Ik lieg altijd."

Bekende andere logische paradoxen zijn *de barbier van Sevilla*, die iedereen scheert die zichzelf niet scheert, *de leugenaarsparadox*, de paradox van Russell, ... ■ ■ ■

Formulering blijkt ook erg belangrijk!

■ ■ ■ Voorbeeld 7 Een onverwachte test

Op vrijdagnamiddag doet de lerares wiskunde de volgende uitspraak aan haar leerlingen, die op elke dag van de week wel een uurtje wiskunde hebben.

> Er zal volgende week een test wiskunde zijn, maar de dag waarop de test doorgaat zal een volledige verrassing zijn.

In plaats van te leren voor de test gaan enkele klasgenoten tijdens het weekend aan het denken. Lynn redeneert dat de test niet kan afgenomen worden op vrijdag, want als de leerlingen donderdagavond weten dat de test nog niet geweest is, zal hij met zekerheid vrijdag doorgaan en is er geen verrassing meer. Michaël pikt erop in: de test kan niet plaatsvinden op donderdag, want als de leerlingen woensdagavond weten dat de test nog niet geweest is, zal iedereen weten dat de test op donderdag doorgaat en is er geen verrassing meer. Met dezelfde redenering leidt Caroline af dat de test niet op woensdag kan vallen, niet op dinsdag en niet op maandag.

Triomfantelijk gaan de leerlingen op maandagmorgen naar de lerares met hun redenering en leggen uit dat er geen verrassingstest mogelijk is. ■ ■ ■

7 De tovenaar en de zeemeermin

Laten we eens kijken naar de paradox van de tovenaar en de zeemeermin.

> Een oneindig rijke tovenaar heeft een vijver in zijn tuin waarin een zeemeermin leeft. Hij houdt ervan met haar een spelletje te spelen: elke seconde gooit hij haar twee goudstukken toe, waarna zij hem telkens één goudstuk teruggooit. Ze spelen dit spel oneindig lang. Wie heeft er op het einde het meeste goudstukken?

Enkele mogelijke oplossingsmethoden (we nummeren steeds de goudstukken):

1. De tovenaar gooit goudstukken 1 en 2 in de vijver en de zeemeermin gooit goudstuk 1 er terug uit. Dan gooit hij de goudstukken 3 en 4 erin en gooit zij goudstuk 2 er terug uit. Hij: goudstuk 5 en 6; zij: goudstuk 3, enzovoort.

   We kunnen besluiten dat de zeemeermin met geen enkel goudstuk overblijft (elk goudstuk wordt op een zeker moment terug gegooid) en de tovenaar heeft alle goudstukken.

2. De tovenaar gooit goudstukken 1 en 2 in de vijver en de zeemeermin gooit goudstuk 1 er terug uit. Dan gooit hij de goudstukken 3 en 4 erin en gooit zij goudstuk 3 er terug uit. Hij: goudstuk 5 en 6; zij: goudstuk 5 enz, enzovoort.

   We kunnen besluiten dat de zeemeermin met de helft van de goudstukken overblijft (elk goudstuk met even nummer wordt niet teruggegooid; de tovenaar heeft alle oneven goudstukken).

3. De tovenaar gooit goudstukken 1 en 2 in de vijver en de zeemeermin gooit goudstuk 2 er terug uit. Dan gooit hij de goudstukken 2 en 3 erin en gooit zij goudstuk 3 er terug uit. Hij: goudstuk 3 en 4; zij: goudstuk 4 enz, enzovoort.

We kunnen besluiten dat de zeemeermin met alle goudstukken overblijft (elk goudstuk wordt op een zeker moment bijgehouden door de zeemeermin) en de tovenaar heeft geen enkel goudstuk meer.

Zo zie je maar:

$$\infty - \infty \text{ is een onbepaald geval!}$$

8 De harmonische paradox

I know, you're looking at this series and you don't see what I'm warning you about. You look and it and you think, "I trust this series. I would take candy from this series. I would get in a car with this series." But I'm going to warn you, this series is out to get you. Always remember: The harmonic series diverges. Never forget it.
Rudbeckia Hirta

Hoewel rijen en reeksen de laatste jaren ook in Vlaanderen aan belang hebben ingeboet binnen de leerplannen, blijft het toch de ideale manier om de leerlingen met het limietbegrip vertrouwd te maken.

■ ■ ■ Voorbeeld 8 De mier op de elastiek

Bekijk even het volgende probleem:

Een mier bevindt zich aan het ene uiteinde van een elastiek van 1 km lang. Zij loopt tegen een snelheid van 1 cm/s naar het andere uiteinde. Na elke seconde wordt de elastiek echter 1 km extra uitgerekt. De mier loopt echter onverstoord verder tegen dezelfde constante snelheid in de hoop het andere uiteinde te halen. Als je ervan uitgaat dat de elastiek kan rekken zover je wil en nooit breekt en ook de mier kan leven zolang je wenst, zal de mier dan ooit het andere einde halen?

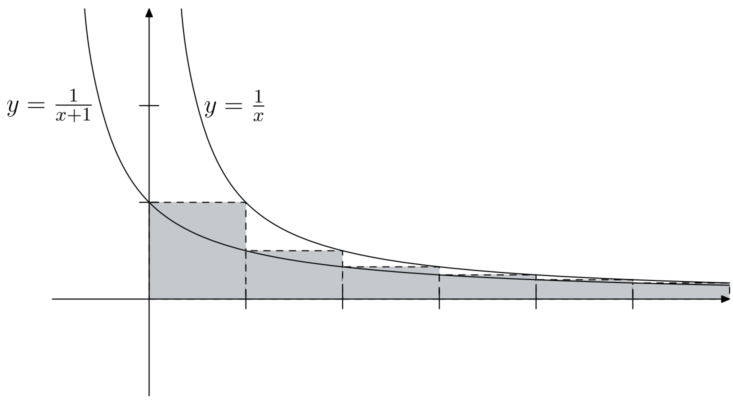
De meerderheid van de mensen zal onmiddellijk zeggen dat dit onmogelijk is. Ondanks het grote verschil tussen de km/s die de elastiek groter wordt en de cm/s die de mier doet, zal de mier toch het andere uiteinde van de elastiek bereiken.

Een wiskundige ontleding is hier wel op zijn plaats.

We controleren welk deel van de elastiek door de mier is afgelegd. Na 1 seconde zal de mier precies 1/100000 van de elastiek afgelegd hebben. Dan wordt de elastiek uitgerekt en wordt dus 200000 cm lang. De mier legt dan gedurende de tweede seconde 1/200000 van de elastiek af. Tijdens de derde seconde legt ie dan 1/300000 af, na de vierde 1/400000 enzovoort. Dan n seconden is het gedeelte dat de mier van de elastiek heeft afgelegd

$$\begin{aligned}\frac{1}{100000} + \frac{1}{2 \cdot 100000} + \frac{1}{3 \cdot 100000} + \cdots + \frac{1}{n \cdot 10^5} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i \cdot 10^5} \\ &= \frac{1}{100000} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \right)\end{aligned}$$

Vermits de harmonische reeks divergeert zal er een n bestaan zodat $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} > 100000$. De mier zal dus *ooit* de andere kant bereiken. De nadruk ligt hier op *ooit*, want het zal zeer lang duren. Deze n bepalen is immers niet vanzelfsprekend. We kunnen wel makkelijk een idee geven hoe lang het duurt. Bekijk de volgende figuur:



De figuur vertelt ons enerzijds dat

$$\int_0^n \frac{1}{x+1}\,dx < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}. \tag{1}$$

Stellen we het linkerlid gelijk aan 100000 en lossen we dit op naar n, krijgen we achtereenvolgens

$$100000 = \int_0^n \frac{1}{x+1}\,dx = \Big[\ln|x+1|\Big]_0^n = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$$
$$\Rightarrow n = e^{100000} - 1.$$

Vullen we deze n in in (1), dan krijgen we

$$100000 < \sum_{i=1}^{\lceil e^{100000}-1 \rceil} \frac{1}{i}.$$

Anderzijds halen we uit de figuur dat

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} < 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,dx. \tag{2}$$

Stellen we het rechterlid gelijk aan 100000 en lossen we dit opnieuw op naar n, dan krijgen we

$$100000 = 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = 1 + \Big[\ln|x|\Big]_1^n = 1 + \ln n$$
$$\Rightarrow n = e^{99999}.$$

Vullen we deze n in in (2), dan krijgen we

$$\sum_{i=1}^{\lfloor e^{99999} \rfloor} \frac{1}{i} < 100000.$$

De n waarop de mier het andere eind bereikt voldoet dus aan

$$e^{99999} < n < e^{100000} - 1$$

of ook nog

$$1.03 \cdot 10^{43429}\text{seconde} < n < 2.81 \cdot 10^{43429}\text{seconde}$$

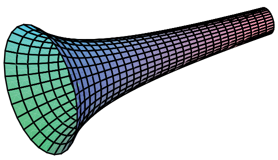
De mier zal dus wel veel langer moeten leven dan ons heelal zal bestaan. ■ ■ ■

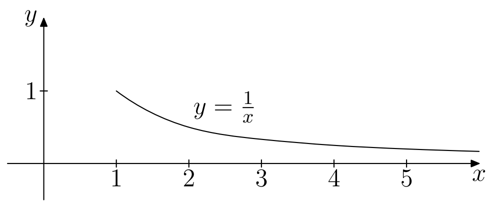
9 Een eindig volume

Hoewel volume en manteloppervlakte van omwentelingslichamen niet meer door alle Vlaamse leerlingen worden bestudeerd, zijn daar wel nog een aantal leuke verrassingen te ontdekken.

■ ■ ■ Voorbeeld 9 De alpenhoorn

Een Zwitserse wiskundige houdt ervan op de alpenhoorn te spelen. Op een dag maakt zij er eentje voor zichzelf: ze neemt de curve $y = \frac{1}{x}$ (met $x \geq 1$) en roteert die rond de x-as.





Ze besluit de alpenhoorn vanbinnen te beschilderen met heldere kleuren en omdat zij een wiskundige is, weet zij hoe ze de oppervlakte moet berekenen via de formule voor de manteloppervlakte van een omwentelingslichaam van de curve $y = f(x)$ op het interval $[a, b]$:

$$\text{Oppervlakte} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Met $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$ en $b = +\infty$, krijgt ze dan

$$2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\, dx.$$

Deze integraal oplossen via een primitieve functie zag ze dan weer niet zitten, maar ze merkte op dat

$$\begin{aligned} 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\,dx &\geq 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4}}{x^3}\,dx \\ &= 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx \\ &= 2\pi[\ln x]_1^{+\infty} = +\infty. \end{aligned}$$

Op dat ogenblik ontdekt ze dat ze een oneindige hoeveelheid verf nodig heeft om deze oppervlakte te schilderen, dus ze besloot dat maar niet te doen.
Om de verveling tegen te gaan, besloot ze dan maar het volume van de alpenhoorn te berekenen: ook hiervan kende ze de formule:

$$\text{Volume} = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx.$$

Met $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$ en $b = +\infty$, krijgt ze dan

$$\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \pi \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = \pi.$$

Meteen bestelt ze π eenheden verf, giet die in de alpenhoorn en giet die er terug uit. Op deze manier heeft ze niet alleen de oneindige oppervlakte geschilderd, ze heeft zelfs nog verf over. Hoe kan dit?

Deze “hoorn van de engel Gabriël” is inderdaad een lichaam dat een eindig volume heeft en een oneindige oppervlakte. De binnenkant van de hoorn verven is echter onmogelijk aangezien je geen laag van uniforme dikte hebt aangezien de hoorn steeds smaller wordt naarmate x naar oneindig gaat. ■ ■ ■

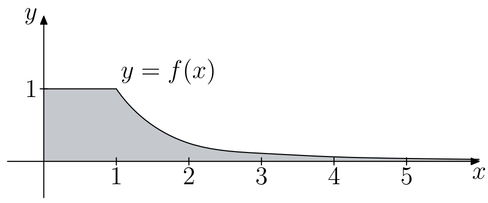
Kan het andersom ook? Zijn er lichamen met een eindige oppervlakte en oneindig volume? Het antwoord hierop is neen, aangezien van de ruimtelichamen die een vaste (eindige) oppervlakte hebben, de sfeer het grootste volume heeft.

Toch kunnen er nog paradoxale dingen gebeuren bij integralen van “oneindige” omwentelingslichamen.

■ ■ ■ Voorbeeld 10 Het aambeeld van Thor

Laten de we eens kijken naar de oppervlakte onder de functie

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{als } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{als } 1 < x \end{cases}$$



Berekenen we de oppervlakte tussen de grafiek van f en de x-as, dan verkrijgen we

$$1+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = 1+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = 2$$

Als we dit gebied roteren rond de y-as, dan verkrijgen we een omwentelingslichaam dat ook wel het *aambeeld van Thor* wordt genoemd. Het volume van deze figuur is echter

$$\pi\int_0^1 x^2\,dy = \pi\int_0^1 \frac{1}{y}\,dy = \pi[\ln y]_0^1 = +\infty$$

Toch het vermelden waard. ■ ■ ■

10 Vergelijkingen

Een belangrijk deel van de leerstof over complexe getallen gaat over het oplossen van vergelijkingen. Vergelijkingen oplossen zorgt echter vaak voor de nodige kopzorgen.

■ ■ ■ Voorbeeld 11 De hoofdstelling van de algebra klopt niet?

De hoofdstelling van de algebra luidt als volgt:

> Een veelterm van de graad n ($n > 0$) heeft steeds n (complexe) oplossingen, multipliciteiten meegerekend.

Klopt deze stelling wel steeds?

Veronderstel dat a, b en c verschillende reële getallen zijn, kijk dan naar de vergelijking

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} = 1.$$

Dit is een tweedegraadsvergelijking waar de getallen a, b en c alle drie aan voldoen.
Waarom voldoet deze vergelijking dan niet aan de hoofdstelling van de algebra? ■ ■ ■

De vergelijking heeft er alles van weg om van de tweede graad te zijn, maar als we beter kijken zien we dat dit niet het geval is: de coëfficiënt van x^2 is immers

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(c-a)(c-b)}+\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}\\&=\frac{(b-a)+(c-b)+(a-c)}{(a-c)(b-c)(b-a)}\\&=0\end{aligned}$$

Een gelijkaardig berekening geeft ook dat de coëffciënt van x gelijk is aan 0 en de constante term van het linkerlid is 1. De vergelijking kan dus worden herleid tot de gelijkheid $1 = 1$ en dit is waar voor elke x, in het bijzonder voor a, b en c.

11 Oplossingen verdwijnen

■ ■ ■ Voorbeeld 12

Veronderstel dat je gevraagd wordt de vergelijking

$$\tan(x+45^\circ)=2\cot x-1$$

op te lossen, dan zal je waarschijnlijk iets doen zoals:

$$\frac{\tan x+\tan 45^\circ}{1-\tan x\cdot\tan 45^\circ}=2\frac{1}{\tan x}-1.$$

Stellen we nu $y=\tan x$:

$$\frac{y+1}{1-y}=2\frac{1}{y}-1.$$

We lossen op naar y:

$$y=\frac{1}{2}.$$

Daarom is $x=\operatorname{Bgtan}\left(\frac{1}{2}\right)+k\cdot 180^\circ$ met k een willekeurig geheel getal. Deze oplossingen zijn correct, maar is er nog een oneindige verzameling van oplossingen die we onderweg verloren zijn. Probeer maar eens 90° in de oorspronkelijke vergelijking te substitueren. Waar zijn de andere oplossingen verloren gegaan? Waarom zijn ze verloren gegaan? ■ ■ ■

Goniometrische formules worden door leerlingen vaak roekeloos gebruikt bij het oplossen van vergelijkingen. Hierbij kunnen stappen genomen worden waarbij er oplossingen overboord worden gegooid. Het is daarom uiterst nuttig bij elke overgang duidelijk aan te geven voor welke x de gebruikte gelijkheden gelden.
Hier werden in de eerste stap twee gelijkheden gebruikt:

$$\tan(x+45^\circ)=\frac{\tan x+\tan 45^\circ}{1-\tan x\cdot\tan 45^\circ}\tag{3}$$

en

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}. \tag{4}$$

Gelijkheid (3) is geldig voor elke x waarbij $\tan x \neq 1$ ($x \neq 45° + k \cdot 90°$), gelijkheid (4) is geldig voor elke x waarbij $\tan x \neq 0$ en $\cot x \neq 0$ ($x \neq k \cdot 90°$).
Het gebruik van formule (4) zorgde hier voor het verdwijnen van de oneindige reeks oplossingen.

Ook bij andere bijzondere functies zijn er formules die je niet zomaar blindelings kan gebruiken.

12 Oplossingen verschijnen

■ ■ ■ Voorbeeld 13

Janis wordt gevraagd de volgende vergelijking op te lossen (in $\mathbb{R}$):

$$x - x^2 = 1 \tag{5}$$

Zij merkt terecht op dat $x = 0$ niet voldoet als oplossing van de vergelijking, dus ze deelt de vergelijking door x en krijgt $1 - x = \frac{1}{x}$ of herschreven

$$x + \frac{1}{x} = 1. \tag{6}$$

Uit vergelijking (5) en (6) samen leidt ze verder af:

$$\begin{aligned} & x - x^2 = x + \frac{1}{x} \qquad (7) \\ \Leftrightarrow\quad & -x^2 = \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow\quad & x^3 = -1 \\ \Leftrightarrow\quad & x = -1 \end{aligned}$$

Wanneer ze -1 in vergelijking (5) invult, blijk deze niet aan (5) te voldoen.
Wat deed ze verkeerd? ■ ■ ■

In de volgende paradox verschijnt er ook oplossing die een duidelijke tegenstrijdigheid oplevert.

■ ■ ■ Voorbeeld 14 Stairway to heaven paradox

Kijk eens naar de volgende vergelijking en los op naar x (veronderstel $x > 0$):

$$x^{x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}} = 2$$

(hierbij is $x^{x^x} = x^{(x^x)}$ en de trap van x’en loopt oneindig door).

De oplossingsmethode is heel eenvoudig als je de macht van de onderste x vervangt door 2. Het is immers opnieuw dezelfde trap als bij de oorspronkelijke vergelijking. Je krijgt dan

$$x^2 = 2,$$

waaruit je wegens $x > 0$ haalt dat $x = \sqrt{2}$.

Je zou hetzelfde verhaal kunnen doen voor de vergelijking

$$x^{x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}} = 4 \tag{8}$$

Hetzelfde principe als hierboven gebruiken, levert $x^4 = 4$ en dus $x = \sqrt{2}$.
We besluiten:

$$2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}} = 4$$

Hoe komen we nu aan deze paradox?

Uiteraard kan, indien het bestaat $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ slechts 1 waarde hebben.
Er blijven twee vragen over:

1. Bestaat deze limiet? Met andere woorden, convergeert de rij $\sqrt{2}, \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}, \ldots$?
2. Convergeert deze rij naar 2 of naar 4? Of naar nog een ander getal?

Laten we voor de handigheid het rijtje a_n noemen:

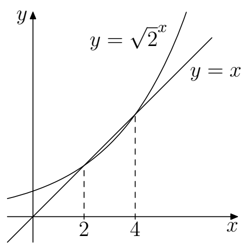
$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_n = \sqrt{2}^{a_{n-1}}.$$

de eerste termen van de rij zijn dan

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1.414213562\\
a_2 &= 1.632526919\\
a_3 &= 1.760839555\\
a_4 &= 1.840910868\\
a_5 &= 1.892712695\\
a_6 &= 1.926999700\\
a_7 &= 1.950034772\\
a_8 &= 1.965664884\\
a_9 &= 1.976341752\\
a_{10} &= 1.983668397
\end{aligned}$$

Convergentie naar 2 lijkt waarschijnlijk. We kunnen dit ook bewijzen. We tonen aan dat de rij strikt stijgend is en begrensd door 2 door gebruik te maken van volledige inductie. We moeten voor elk natuurlijk getal n aantonen dat $a_n < a_{n+1}$ en dat $a_n < 2$:

- Voor $n = 1$ is dit duidelijk: $a_1 < a_2$ en $a_1 < 2$.
- Veronderstel nu dat $a_{n-1} < a_n$ en dat $a_{n-1} < 2$. Vermits $f(x) = \sqrt{2}^x$ een strikt stijgende functie is, volgt hier onmiddellijk uit dat
$$\sqrt{2}^{a_{n-1}} < \sqrt{2}^{a_n} \qquad \text{en} \qquad \sqrt{2}^{a_{n-1}} < \sqrt{2}^2$$
en dus
$$a_n < a_{n+1} \qquad \text{en} \qquad a_n < 2.$$



De rij is dus strikt stijgend en naar boven begrensd en bijgevolg convergent. Omdat elke a_n kleiner is dan 2 moet $a = \lim_{n\to\infty} a_n \leq 2$.

We weten ook dat $\sqrt{2}^a = a$. Indien we dit oplossen naar a krijgen we precies de oplossingen 2 en 4 (zie figuur) en we kunnen besluiten dat $a = 2$.

Hoe komt het dat we $\sqrt{2}$ als oplossing vonden voor (8)? De fout die tot deze paradox leidde was helemaal in het begin. We gingen ervan uit dat de vergelijking een oplossing zou hebben. Deze veronderstelling leidde tot de "oplossing" $\sqrt{2}$. De enige kandidaat voor een oplossing was dus $\sqrt{2}$, indien er een oplossing is. We hebben echter zonet aangetoond dat $\sqrt{2}$ geen oplossing is en we concluderen dat (8) geen oplossing heeft. ■ ■ ■

Hetzelfde gebeurde bij het oplossen van de vergelijking $x - x^2 = 1$ uit het vorige voorbeeld. Janis ging ervan uit dat de vergelijking een reële oplossing heeft en uit haar redenering volgt dan dat $x = -1$. Dit blijkt echter geen oplossing te zijn van vergelijking (5). Bijgevolg heeft (5) geen reële oplossingen.

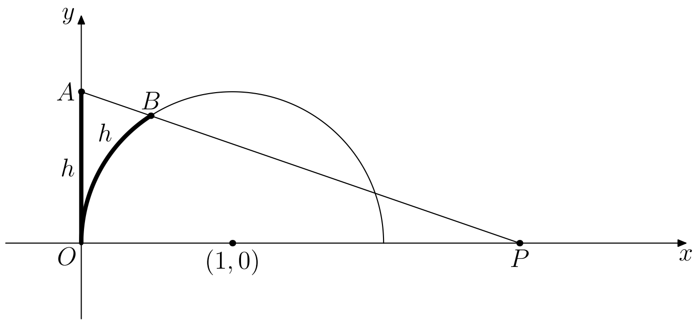
De foutief oplossing werd geïntroduceerd door een onomkeerbare stap in de redenering. Vergelijkingen (5) en (6) combineren tot vergelijking (7) is correct, maar vergelijkingen (5) en (6) afleiden uit vergelijking (7) kan niet.

We kunnen trouwens opmerken dat de laatste stap die Janis maakt eigenlijk een deling door 0 is:

$$\begin{aligned} & & x^3 &= -1 \\ &\Rightarrow & x^3 + 1 &= 0 \\ &\Rightarrow & (x+1)(x^2 - x + 1) &= 0 \\ &\Rightarrow & x &= -1, \text{ of } x^2 - x + 1 = 0 \end{aligned}$$

13 Een onverwacht limietgeval

In de figuur hieronder zie je (een deel van) de cirkel met straal 1 en middelpunt $(1,0)$. Een punt A bevindt zich op de y-as zodat $|OA| = h < 2$ en laat B het punt op de cirkel zijn zodat de lengte van de boog $\overset{\frown}{OB}$ ook gelijk is aan h. De rechte door A en B snijdt de x-as in het punt P.



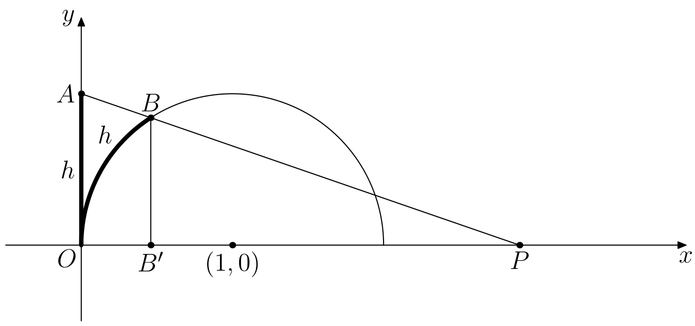
Wat gebeurt er met P als h naar 0 gaat?

Vele leerlingen zouden kunnen denken dat als h naar 0 neigt, dat dan P naar ∞ gaat. De y-waarde van B is immers $\sin h$. Als $h \to 0$ is immers $h \sim \sin h$ ($\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$) en zal de rechte dus steeds horizontaler worden en je kan dus verwachten dat de P steeds verder naar rechts opschuift.

Het gevoel kan je hier echter misleiden. Enkel een effectieve berekening brengt hier soelaas. Laten we het even uitspitten.

We noemen in de figuur B' het voetpunt van de loodlijn door B op de x-as. We weten ook dat B de coördinaat $(1 - \cos h, \sin h)$ heeft. De lijnstukken $[AO]$ en $[BB']$ zijn dan overeenkomstige zijden van de gelijkvormige driehoeken $\triangle AOP$ en $\triangle BB'P$, zodat

$$\frac{|OP|}{h} = \frac{|B'P|}{\sin h} = \frac{|OP| - |OB'|}{\sin h} = \frac{|OP| - (1 - \cos h)}{\sin h}$$



Als we dit oplossen naar $|OP|$ vinden we

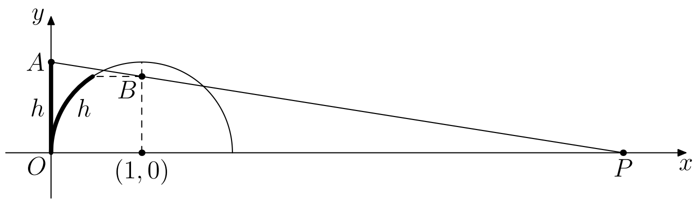
$$|OP| = \frac{h(1-\cos h)}{h-\sin h}$$

en dus is (door gebruik van de regel van l'Hospital)

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}|OP| &= \lim_{h\to 0}\frac{h(1-\cos h)}{h-\sin h}\\ &\stackrel{H}{=} \lim_{h\to 0}\frac{(1-\cos h)+h\sin h}{1-\cos h}\\ &\stackrel{H}{=} \lim_{h\to 0}\frac{\sin h+\sin h+h\cos h}{\sin h}\\ &= 2+\lim_{h\to 0}\frac{h}{\sin h}\cdot\cos h\\ &= 2+\lim_{h\to 0}\frac{h}{\sin h}\cdot\lim_{h\to 0}\cos h\\ &= 3.\end{aligned}$$

In de limiet zal P dus het punt met coördinaat $(3,0)$ zijn.

Anders wordt het verhaal indien we het punt B met een vaste x-waarde kiezen. Kies je bijvoorbeeld $\mathrm{co}(B) = (1,\sin h)$, dan krijgen we een andere limiet:



We krijgen dan

$$\frac{|OP|}{h} = \frac{|OP|-1}{\sin h}$$

en hieruit halen we

$$|OP| = \frac{h}{h-\sin h}$$

met in de limiet

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}|OP| &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h-\sin h}\\ &\stackrel{H}{=} \lim_{h\to 0}\frac{1}{1-\cos h}\\ &= +\infty.\end{aligned}$$

Een introductie in financiële producten en markten

Prof.dr.ir. C.W. Oosterlee
Centrum Wiskunde & Informatica

Als je een financiële instelling goed bekijkt blijkt er een grote behoefte te zijn aan medewerkers met een toegepast wiskundig inzicht. 'Financial Engineers' worden ze genoemd, of ook wel 'Quants' (quantitative analysts) en 'Rocket Scientists on Wall Street' is veel voorkomende kreet. Naast de handelsafdelingen met de handelaars zijn er ook groepen binnen banken die zich met het valideren van wiskundige modellen bezighouden en met het opstellen van modellen voor nieuwe producten.

In deze les bespreken we de wiskundige modellering van een aantal financiële basisproducten, zoals het aandeel en de optie.

Een basisinstrument is het aandeel. Het representeert een klein stukje van een firma. De prijs van een aandeel wordt bepaald door de huidige waarde van een firma en de verwachtingen van de winst van die firma in de toekomst. De toekomstige waarde van een aandeel is dus onzeker. Omdat aandeelprijzen een random component bevatten zijn wiskundige modellen voor aandeelprijzen gebaseerd op stochastische differentiaalvergelijkingen. Er zijn verschillende modellen in omloop die allen interessante wiskundige aspecten bevatten. Vanzelfsprekend worden deze getoetst aan gegevens uit het verleden.

Een ander belangrijk financieel instrument is de optie. Opties zijn contracten tussen twee partijen om in de toekomst aandelen te kopen of verkopen tegen een afgesproken prijs. De twee partijen heten houder (holder) van de optie en uitgever (writer) van de optie. Er hangt een prijskaartje aan een optiecontract, een bedrag dat de holder aan de writer betalen moet. Het bepalen van een faire prijs voor een optie, in afhankelijkheid van een gekozen aandelenmodel, is de wiskundige opgave waar wij ons mee bezighouden.

Pas op 26 april 1973 werden opties voor het eerst verhandeld op een beurs. Toen begon men op The Chicago Board Options Exchange met standaard beursgenoteerde opties. Nu worden er wereldwijd op meer dan 50 beurzen standaard opties verhandeld. In Nederland is dat bij de Euronext optiebeurs op Beursplein 5 in Amsterdam. Naast de standaard opties, die op de beurzen worden verhandeld, stellen banken ook niet-standaard optiecontracten ('exotics') op voor bedrijven met speciale wensen. Deze opties moeten ook geprijsd worden.

Hier volgt een korte beschrijving van een standaard optie, de koopoptie of call. De houder van deze optie mag in de toekomst aandelen kopen voor een afgesproken prijs. De andere partij (schrijver) moet aandelen verkopen, als de houder wil kopen. De schrijver ontvangt de optieprijs, maar heeft een verplichting in de toekomst: hij levert de aandelen tegen de van tevoren afgesproken prijs. Dit kan een groot risico opleveren. Als aandelen bijvoorbeeld veel meer waard geworden zijn dan die afgesproken prijs moet de writer ze eventueel 'duur' kopen en tegen de goedkopere prijs aan de holder doorverkopen. Die holder verkoopt de aandelen dan direct op de aandelenmarkt voor de hogere marktprijs en kan een flinke winst maken.

Schrijvers gebruiken opties echter als een soort verzekering tegen de invloed van onverwachte bewegingen in de aandelenmarkt. Er zijn opties die voor een writer meer waard worden als aandeelprijzen dalen, en er zijn opties die minder waard worden als aandeelprijzen stijgen. Met een slimme combinatie van aandelen en opties in een portefeuille, kan de portefeuille voor korte tijd risicovrij gemaakt worden. Een reductie van risico, bijvoorbeeld door aandelen en opties te combineren, heet hedgen. Als een writer een optie kan verkopen voor iets meer dan hij volgens een model waard is, en vervolgens steeds zijn portefeuille perfect (risicovrij) aanpast tot de uitoefendatum van de optie, maakt hij een 'risicovrije winst'.

De waarde van een aandeel wordt dus als een stochastische differentiaalvergelijking gemodelleerd. Op basis daarvan zal voor een eenvoudige zogenaamde Europese optie een partiële differentiaalvergelijking opgelost dienen te worden. Voor deze contracten bestaat er een analytische oplossing. 'Oplossingen' zijn hier in het algemeen de prijzen van deze producten op het tijdstip t=0.

Voor vele andere producten is het niet meer mogelijk om analytische oplossingen te vinden voor de bijbehorende prijzen en moet toevlucht genomen worden tot technieken uit de numerieke wiskunde. Tevens geven we aan in welke richtingen de financiële markten geëvalueerd zijn en hoe zij steeds complexere producten zijn gaan definiëren. Ook bespreken we welke impact dit heeft op de wiskundige modellen en de oplossingen.

Financiële Wiskunde

Hans van der Weide

Technische Universiteit Delft

Federer en Murray spelen de finale van het tennis toernooi van Wimbledon. Zij A de gebeurtenis dat Federer wint en B de gebeurtenis dat Murray wint. Een van de regels van de kansrekening zegt dat de kansen $P(A)$ en $P(B)$ getallen tussen 0 en 1 zijn en dat $P(A) + P(B) = 1$. Stel nu dat ik, tegen deze regels in, denk dat $P(A) = 0,7$ en $P(B) = 0,6$. Dat betekent dat ik bereid ben 60 EURO te betalen als ik 100 EURO krijg bij winst van Federer. Immers de verwachte opbrengst van deze weddenschap is $40 \times P(A) - 60 \times P(A^c) = 40 \times 0,7 - 60 \times 0,3 = 10$ EURO. Ook ben ik bereid 50 EURO te betalen als ik 100 EURO krijg bij winst van Murray, want de verwachte opbrengst is weer 10 EURO. Als ik beide weddenschappen aanga moet ik 110 EURO betalen terwijl ik onder alle omstandigheden slechts 100 EURO win. Dus ik verlies bij het gelijktijdig aangaan van deze twee gunstige weddenschappen met zekerheid 10 EURO. Zo'n combinatie van weddenschappen waarvan de opbrengst onder alle omstandigheden negatief is heet een Dutch book. De constructie van een Dutch book was mogelijk omdat ik niet de regels van de kansrekening volgde. Als de regels van de kansrekening gevolgd worden, dan is het onmogelijk om een Dutch book constructie te maken. Zie ook De Finetti [2], pagina 87, waar de onmogelijkheid van Dutch books onderdeel uitmaakt van de criteria waaraan kansen moeten voldoen.

Een arbitrage mogelijkheid in een financiële markt is de situatie waarin een investeerder een positief rendement behaalt uit een investering die ≤ 0 is. Het idee van een arbitrage mogelijkheid lijkt hiermee heel dichtbij het idee van een Dutch book te liggen. Zoals een consistente kanstheorie de vorming van Dutch books uitsluit, zo is in een consistent model van een financiële markt arbitrage niet mogelijk. Zie ook Burdzy [1], pagina 171. We werken het principe van no-arbitrage in onderstaande verder uit.

1 Een simpel model voor een financiële markt

In deze Sectie introduceren we een simpel model voor een financiële markt, we volgen Shreve [3]. In dit model kunnen transacties slechts op twee tijdstippen plaatsvinden, die we aanduiden met $t = 0$ en $t = 1$. Verder representeren de elementen van de verzameling Ω de mogelijke toestanden van de wereld. Op tijd $t = 0$ is de toestand van de wereld niet bekend voor een investeerder, maar op tijd $t = 1$ wordt deze aan hem geopenbaard. Wij beschouwen het geval van twee toestanden $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. In ons model kan de investeerder zijn geld op een bankrekening zetten met rente r. Dus een kapitaal A dat op tijd $t = 0$ op de bank gezet wordt groeit naar $A(1 + r)$ op tijd $t = 1$. Tenslotte is er een aandeel waarvan de prijs op tijd $t = 0$ gegeven wordt door S_0. De prijs S_1 op tijd $t = 1$ hangt af van de toestand van de wereld. De prijs kan omhoog gaan $S_1(\omega_1) = uS_0$ voor een $u > 1$ of omlaag, $S_1(\omega_2) = dS_0$ met $0 < d < 1$. Verder is alleen de situatie waarbij $d < 1 + r < u$ realistisch. Immers als bijvoorbeeld $1 + r > u$ zou zijn, dan zou niemand in het aandeel investeren omdat een belegging in de bank in iedere toestand van de wereld een hoger rendement heeft.

We kunnen ons nu allereerst afvragen of dit model arbitrage-vrij is. Hier zullen we met een arbitrage een investering in de bankrekening en het aandeel bedoelen, die op tijd $t = 0$ waarde $V_0 = 0$ heeft en die op tijd $t = 1$ nooit een negatieve waarde (verlies) kan hebben en in minstens één toestand van de wereld strikt positief is. Stel dat we op tijd $t = 0$ een bedrag x op de bank zetten. We laten ook toe dat x negatief is. In dat geval hebben we een bedrag $-x$ geleend van de bank. Hierbij veronderstellen we dat de rente voor lenen hetzelfde is als de rente voor sparen. Verder bezitten we y aandelen. We nemen aan dat y niet geheel hoeft te zijn, we kunnen ook een half aandeel hebben. Een negatieve waarde van $y = -2$ is ook mogelijk en betekent dat we 2 aandelen verkocht hebben. Verder nemen we aan dat er geen transactie kosten zijn. De waarde van deze investering op tijd $t = 0$ is nu $V_0 = x + yS_0$. De waarde op tijd $t = 1$ hangt af van de toestand van de wereld:

$$V_1(\omega_1) = x(1 + r) + yuS_0 \quad \text{en} \quad V_1(\omega_2) = x(1 + r) + ydS_0.$$

We kunnen nu ook zeggen dat

$$V_1(\omega_1) = x((1 + r) - u) + uV_0 \quad \text{en} \quad V_1(\omega_2) = x((1 + r) - d) + dV_0.$$

Uit $V_0 = 0$, mogen we concluderen dat voor een arbitrage zowel $x((1+r)-u) \geq 0$ als $x((1 + r) - d) \geq 0$ moet gelden. Omdat we aangenomen hebben dat $d < 1 + r < u$ is, volgt dat $x = 0$. Maar dan is $V_1(\omega_1) = V_1(\omega_2) = 0$ en we zien dat er geen arbitrage mogelijk is.

2 Prijzen van derivaten

We laten nu zien dat met principe van no-arbitrage ook prijzen van derivaten berekend kunnen worden. We doen dit voor het simplele model van Sectie 1 en we gebruiken de daar geïntroduceerde notatie. Beschouw een derivaat met uitbetaling H op tijdstip $t = 1$. Bijvoorbeeld voor een Europese call optie met strike K en maturity $T = 1$ is $H = \max(S_1 - K, 0)$. Wat de precieze uitbetaling zal zijn wordt pas bekend op tijd $t = 1$. De vraag is nu voor welke prijs dit derivaat op tijd $t = 0$ verkocht kan worden. Dus stel dat een handelaar op $t = 0$

dit derivaat verkoopt voor een prijs C. De handelaar verplicht zich dus om op $t = 1$ een bedrag H te betalen aan de koper van het derivaat. De handelaar koopt tevens x aandelen, waarbij x zó gekozen wordt dat de waarde van zijn portfolio op tijd $t = 1$ niet afhangt van het scenario, dus

$$xS(\omega_1) - H(\omega_1) = xS(\omega_2) - H(\omega_2).$$

Hieruit volgt dat

$$x = \frac{H(\omega_1) - H(\omega_2)}{S(\omega_1) - S(\omega_2)}.$$

Met deze keuze van x hebben we een portfolio geconstrueerd waarvan de waarde van $C - xS_0$ naar de (non-random) waarde $xS_1 - H$ stijgt. Volgens het principe van no-arbitrage moet gelden dat deze groei hetzelfde is als de groei van een spaar deposito, dus

$$(1 + r)(C - xS_0) = xS_1 - H.$$

We zien dus dat het principe van no-arbitrage impliceert dat het derivaat voor de prijs

$$\begin{aligned} C = \frac{1}{1+r}\left(xS_1(\omega_1) - H(\omega_1) + (1+r)xS_0\right) \\ = \frac{1}{1+r}\left(xS_1(\omega_2) - H(\omega_2) + (1+r)xS_0\right) \end{aligned}$$

verkocht moet worden.

We bekijken dit probleem nu nog vanuit een andere optiek. Stel dat een handelaar op $t = 0$ de claim verkoopt voor een bedrag C. Om zich tegen verlies in te dekken besluit hij Δ aandelen te kopen. Het bedrag $C - \Delta S_0$ dat over blijft, zet hij op de bank. De waarde van de portfolio op tijd $t = 1$ is gelijk aan

$$(1 + r)(C - \Delta S_0) + \Delta S_1 = (1 + r)C + \Delta(S_1 - (1 + r)S_0).$$

De waarde van de portfolio op tijd $t = 1$ hangt dus af van het scenario. De handelaar zal nooit verlies lijden als hij de prijs C voor het derivaat en het aantal aandelen Δ zó kiest dat

$$\left\{ \begin{array}{rcl} C + \Delta\left(\frac{1}{1+r}S_1(\omega_1) - S_0\right) & = & \frac{1}{1+r}H(\omega_1), \\ C + \Delta\left(\frac{1}{1+r}S_1(\omega_2) - S_0\right) & = & \frac{1}{1+r}H(\omega_2). \end{array} \right.$$

Deze portfolio repliceert de payoff van het derivaat. Een replicerende portfolio wordt een hedge genoemd. Als ieder derivaat gerepliceerd kan worden dan zeggen we dat het marktmodel compleet is. In werkelijkheid is de markt niet compleet en kunnen niet alle derivaten perfect "gehedged"worden. Om de hedge te vinden en de prijs van het derivaat moeten we het bovenstaande stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden oplossen. Om dit stelsel op te lossen vermenigvuldigen we de eerste vergelijking met getal $\tilde{p}$ en de tweede vergelijking met $\tilde{q} = 1 - \tilde{p}$. Optellen van de vergelijkingen geeft dan

$$C + \Delta \left(\frac{1}{1+r} \left[\tilde{p} S_1(\omega_1) + \tilde{q} S_1(\omega_2) \right] - S_0 \right) = \frac{1}{1+r} \left[\tilde{p} H(\omega_1) + \tilde{q} H(\omega_2) \right].$$

Kies nu $\tilde{p}$ zó dat

$$S_0 = \frac{1}{1+r} \left[\tilde{p} S_1(\omega_1) + \tilde{q} S_1(\omega_2) \right].$$

Als we in deze vergelijking $S_1(\omega_1) = uS_0$ en $S_1(\omega_2) = dS_0$ substitueren, dan krijgen we

$$S_0 = \frac{1}{1+r} \left[\tilde{p} u S_0 + \tilde{q} d S_0 \right] = \frac{S_0}{1+r} \left[\tilde{p}(u-d) + d \right],$$

waaruit volgt dat

$$\tilde{p} = \frac{(1+r) - d}{u - d}, \quad \tilde{q} = \frac{u - (1+r)}{u - d}.$$

Merk op $0 < \tilde{p} < 1$ als $0 < d < 1+r < u$. We vinden nu de volgende eenvoudige formule voor de prijs van het derivaat

$$C = \frac{1}{1+r} \left[\tilde{p} H(\omega_1) + \tilde{q} H(\omega_2) \right].$$

Tenslotte volgt

$$\Delta = \frac{H(\omega_1) - H(\omega_2)}{S_1(\omega_1) - S_1(\omega_2)}.$$

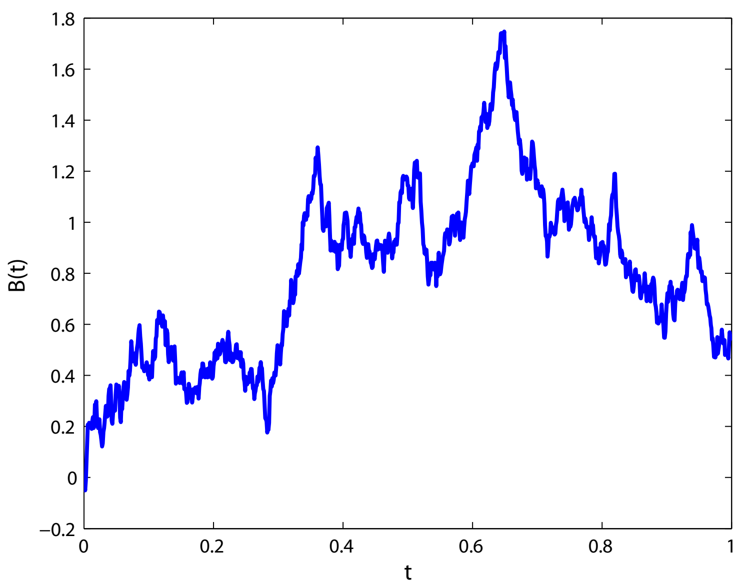
Hiermee is onze berekening voltooid en we zien dat de kansen op scenario ω_1 en ω_2 hierbij geen enkele rol hebben gespeeld. Wel kan de prijs van het derivaat geïnterpreteerd worden als de verwachtingswaarde van de verdisconteerde payoff $H/(1+r)$.

3 Modellen voor aandeelprijzen

In het jaar 2000 organiseert de Bachelier Society haar eerste wereld congres in Parijs, precies honderd jaar nadat Louis Bachelier zijn proefschrift "Théorie de la Spéculation"publiceerde in de Annales Scientifiques de l'École Normale Suprieure. Een PDF file van dit proefschrift is makkelijk te vinden op internet. Zijn promotor was Henri Poincaré, aan wie het proefschrift ook was opgedragen. Bachelier's werk bleef lang onopgemerkt, hoewel hij al de verdelingsfunctie van Brownse beweging afleidt en de link ziet met de diffusie vergelijking, 5 jaar eerder dan Einstein. Bachelier was de eerste die financiële markten modelleerde met Brownse beweging. Wat is Brownse beweging? In de wiskunde is Brownse beweging een stochastisch proces met continue tijdsparameter. Dat betekent dat Brownse beweging een familie reëelwaardige stochasten $B = \{B(t); t \geq 0\}$ is, alle gedefinieerd op een zekere kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dus aan ieder scenario $\omega \in \Omega$ kunnen we een functie koppelen door het voorschrift $t \in [0, \infty) \mapsto B(t, \omega) \in \mathbb{R}$. De functies die we op deze manier verkrijgen worden paden of realisaties van het stochastisch proces genoemd. In het begin van de twintigste eeuw werden stochastische processen ook wel stochastische functies genoemd. Het stochastisch proces B is standaard Brownse beweging als

1. $B(0) \equiv 0$, (het proces start in 0),
2. voor $0 \leq s < t$ is de stochast $B(t) - B(s)$ normaal verdeeld met verwachting 0 en variantie $t - s$, (aangroeiingen zijn normaal verdeeld),
3. voor ieder eindig aantal tijdstippen $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ zijn de aangroeiingen $B(t_i) - B(t_{i-1})$, $1 \leq i \leq n$, onafhankelijke stochasten,
4. de realisaties van B zijn continue functies.

Figuur 1. bevat een realisatie van Brownse beweging.



Figuur 1. Realisatie van Brownse beweging

Voor Brownse beweging eisen we dat de realisaties continue functies zijn, dus Brownse beweging kunnen we opvatten als een afbeelding $\omega \in \Omega \mapsto C_{\mathbb{R}}[0, \infty)$.

Onder afbeelding gaat de kans $\mathbb{P}$ op Ω over in een kansmaat W op de ruimte van continue functies $C_{\mathbb{R}}[0,\infty)$. De letter W gebruiken we ter ere van Wiener die in 1923 als eerste een kansruimte (Ω, F, P) construeerde voor Brownse beweging en daarmee dus de existentie van Brownse beweging aantoonde. De moeilijkheid zit in de continue realisaties. Er is een heleboel te zeggen over Brownse beweging. Hier willen we iets zeggen over integratie ten opzichte van Brownse beweging omdat dit een belangrijke rol speelt in financiële wiskunde. Als voorbeeld kiezen we de integraal $\int_0^T B(s)\,\mathrm{d}B(s)$. We beginnen op de gebruikelijke wijze met het kiezen van een eindige partitie $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ van het integratie interval $[0,T]$. Nu moeten we voor ieder partitie interval $[t_{i-1}, t_i]$ een punt τ_i kiezen waarin we de integrand evalueren. We krijgen dan de Riemann som

$$\sum_{i=1}^{n} B(\tau_i)(B(t_i) - B(t_{i-1})).$$

In de klassieke integratie theorie wordt aangetoond dat de limiet bestaat als de integrator $B(t)$ van begrensde variatie is, d.w.z.

$$\sum_{i=1}^{n} |B(t_i) - B(t_{i-1})| \to L < \infty.$$

De uitkomst van de limiet hangt niet af van de keuze van de punten $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Maar realisaties van Brownse beweging blijken niet van begrensde variatie te zijn, zoals later nog zal worden bewezen. Om te kijken wat er aan de hand is maken we een vergelijking van de Riemann som $R_1 = \sum_{i=1}^{n} B(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1}))$ voor $\tau_i = t_{i-1}$ en en de Riemann som $R_2 = \sum_{i=1}^{n} B(t_i)(B(t_i) - B(t_{i-1}))$ voor de keuze $\tau_i = t_i$. Het verschil van deze twee Riemann sommen is

$$R_2 - R_1 = \sum_{i=1}^{n} (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2.$$

Voor een continu-differentieerbare functie $f : [0,T] \mapsto \mathbb{R}$ geldt

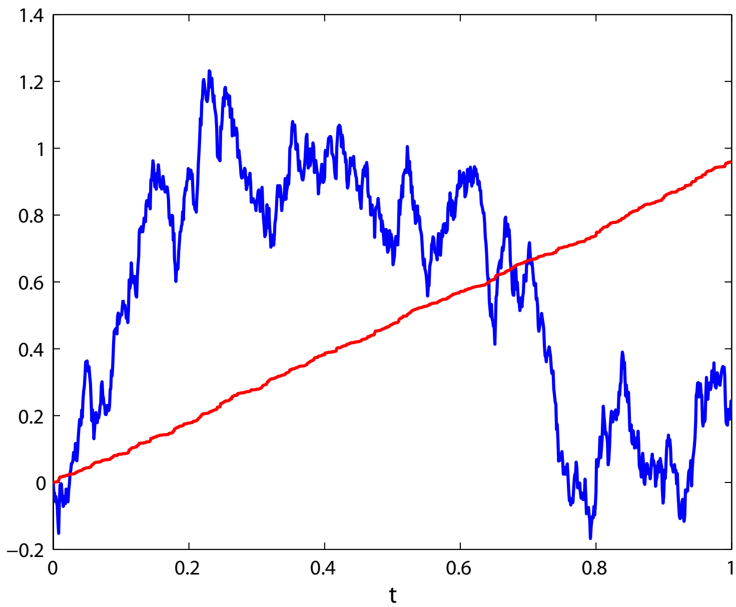
$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

voor een zekere $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Dus

$$\sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 \leq \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}) \sum_{i=1}^{n} \left(f'(\xi_i)\right)^2 (t_i - t_{i-1}).$$

Als we de limiet nemen over een rij parties waarvoor $\max_{1 \leq i \leq n}(t_i - t_{i-1}) \to 0$, dan convergeert de som $\sum_{i=1}^{n} \left(f'(\xi_i)\right)^2 (t_i - t_{i-1})$ naar de integraal $\int_0^T \left(f'(x)\right)^2 \,\mathrm{d}x$ die eindig is. Dus de kwadratische variatie van f over $[0,T]$, die gedefinieerd is als de limiet van de sommen $\sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2$ en die we noteren als

$[f,f](T)$, is 0. We gaan nu onderzoeken wat de kwadratische variatie van Brownse beweging is. In Figuur 2 zien we een realisatie van Brownse beweging samen met de bijbehorende kwadratische variatie.



Figuur 2. Realisatie van Brownse beweging met bijbehorende kwadratische variatie

We zullen nu een bewijs geven dat de kwadratische variatie van Brownse beweging $[B,B]_t = t$. Om de redenering zo eenvoudig mogelijk te maken kiezen we een dyadische partitie van het interval $[0,t]$ waarbij het interval in 2^n stukken verdeeld wordt van gelijke lengte:

$$t_{i,n} = i\frac{t}{2^n}, \quad i = 0, 1, \ldots, 2^n.$$

Definieer

$$S_n = \sum_{i=1}^{2^n} (B(t_{i,n}) - B(t_{i-1,n}))^2.$$

We moeten aantonen dat $\lim_{n\to\infty} S_n = t$. Uit de definitie van Brownse beweging volgt dat S_n de som is van kwadraten van onafhankelijke stochasten, die alle normaal verdeeld zijn met verwachting 0 en variantie $t/2^n$. Dus $\mathbb{E}\left[(B(t_{i,n}) - B(t_{i-1,n}))^2\right] = t/2^n$ en

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=1}^{2^n} \mathbb{E}\left[(B(t_{i,n}) - B(t_{i-1,n}))^2\right] = t.$$

We berekenen ook nog de variantie van S_n. Hiervoor gebruiken dat voor een standaard-normaal verdeelde stochast U geldt dat $\mathbb{E}(U) = 0$, $\mathbb{E}(U^2) = 1$, $\mathbb{E}(U^3) = 0$ en $\mathbb{E}(U^4) = 3$. Hieruit volgt dat

$$\mathrm{Var}(U^2) = \mathbb{E}(U^4) - \big(\mathbb{E}(U^2)\big)^2 = 2.$$

Nu is $U = (B(t_{i,n}) - B(t_{i-1,n}))/\sqrt{t_{i,n} - t_{i-1,n}}$ standaard normaal verdeeld, dus

$$\mathrm{Var}\left((B(t_{i,n}) - B(t_{i-1,n}))^2\right) = \mathrm{Var}\left((t_{i,n} - t_{i-1,n})U^2\right) = \frac{2t^2}{2^{2n}}.$$

Hieruit volgt dat

$$\mathrm{Var}\,(S_n) = \sum_{i=1}^{2^n} \mathrm{Var}\left((B(t_{i,n}) - B(t_{i-1,n}))^2\right) = \frac{t^2}{2^{n-1}}.$$

Als we nu aantonen dat $\sum_{n=1}^{\infty}(S_n - t)^2$ eindig is, dan mogen we concluderen dat $\lim_{n\to\infty}(S_n - t)^2 = 0$. Hieruit volgt dat

$$\lim_{n\to\infty} S_n = t,$$

waarmee het bewijs voltooid is. De reden dat we de in de som $\sum_{n=1}^{\infty}(S_n - t)^2$ geïnteresseerd zijn is dat $\mathbb{E}\left((S_n - t)^2\right)$ gelijk is aan de zojuist berekende variantie van S_n. Door gebruik te maken van de monotone convergentie stelling volgt nu

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(S_n - t)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(S_n - t)^2\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{Var}(S_n) \\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{t^2}{2^{n-1}} = 2t^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Dus de verwachtingswaarde van de som $\sum_{n=1}^{\infty}(S_n - t)^2$ is eindig waaruit we mogen concluderen dat de som zelf ook (met kans 1) eindig is. $\square$

We hebben nu gezien dat de kwadratische variatie van een realisatie van Brownse beweging niet gelijk aan 0 is zoals voor continu-differentieerbare functies. We laten nu zien dat hieruit volgt dat de realisaties van Brownse beweging niet van eindige variatie kunnen zijn. Immers, als

$$\sum_{i=1}^{n}|B(t_i) - B(t_{i-1})| \to L < \infty,$$

dan is

$$\sum_{i=1}^{n}(B(t_i)-B(t_{i-1}))^2 \le \max_{1\le i\le n}|B(t_i)-B(t_{i-1})|\sum_{i=1}^{n}|B(t_i)-B(t_{i-1})|.$$

Nu zijn de realisaties van Brownse beweging continue functies, dus uniform continu op $[0,T]$. Dat betekent dat we voldoend fijne partities alle termen $|B(t_i)-B(t_{i-1})|$ kleiner kunnen krijgen dan een gegeven $\epsilon>0$. Maar dat betekent dat we bij het nemen van de limiet 0 zouden krijgen voor de kwadratische variatie van Brownse beweging, in tegenspraak met de boven bewezen Stelling. Dus we moeten concluderen dat de aanname dat realisatie van Brownse beweging van eindige variatie zijn onjuist is.
We moeten bij bovenstaande opmerken dat we bewijzen alleen geleverd hebben voor de speciale rij van dyadische partities. De resultaten zijn echter ook algemener geldig, zie Steele [4]. Vervolgens willen we nu nog even terugkomen op de integraal $\int_0^T B(s)\,\mathrm{d}B(s)$ waarmee we begonnen zijn.
Eerst merken we nog op dat

$$\begin{aligned}R_1+R_2 &= \sum_{i=1}^{n}(B(t_i)+B(t_{i-1}))(B(t_i)-B(t_{i-1}))\\ &= \sum_{i=1}^{n}\{B^2(t_i)-B^2(t_{i-1})\} = B^2(T).\end{aligned}$$

Dus kunnen we R_1 oplossen uit het stelsel vergelijkingen gevormd door deze vergelijking en de boven afgeleide vergelijking $R_2-R_1=\sum_{i=1}^{n}(B(t_i)-B(t_{i-1}))^2$. We vinden

$$R_1=\sum_{i=1}^{n}B(t_{i-1})(B(t_i)-B(t_{i-1}))=\frac{1}{2}B^2(T)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(B(t_i)-B(t_{i-1}))^2.$$

Nemen we nu de limiet, dan volgt voor de integraal als limiet van Riemann sommen waarbij de integrand geëvalueerd wordt in het linker eindpunt van het partitie interval dat

$$\int_0^T B(s)\,\mathrm{d}B(s)=\frac{1}{2}B^2(T)-\frac{1}{2}T.$$

We hebben de Itô integraal berekend.
In 1973 publiceerden Fisher Black en Myron Scholes hun baanbrekende artikel over het prijzen van opties. Overigens was het artikel door de belangrijke economische vaktijdschriften niet geaccepteerd voor publicatie omdat de referees in de veronderstelling leefden dat de prijs voor opties, die in het artikel afgeleid wordt, niet correct was. Daarom is het artikel uiteindelijk gepubliceerd in een obscuur Marxistisch(!) tijdschrift in de Verenigde Staten, The Journal of

Political Economy. Het in dat artikel voorgestelde model is gebaseerd op de volgende stochastische differentiaal vergelijking voor de aandeel prijs

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)} = \alpha\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B(t), \quad S(0) = s_0,$$

waarbij de log-returns gemodelleerd zijn als de som van een deterministische term $\alpha\,\mathrm{d}t$ en een stochastische term $\sigma\,\mathrm{d}B(t)$, die onafhankelijk is van het process tot en met tijd t. Dit model impliceert dat bij het berekenen van integralen ten opzichte van Brownse beweging de integrand geëvalueerd in het linker eindpunt van het partitie interval. Bachelier modelleerde op deze wijze in zijn proefschrift de returns $\mathrm{d}S(t)$ (zonder logaritme). De oplossing van de stochastische diferentiaalvergelijking wordt gegeven door

$$S(t) = s_0 \exp\left\{\sigma B(t) + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right\}.$$

Dit proces $(S(t))$ wordt geometrische Brownse beweging genoemd. In onze voordracht tijdens de Vakantiecursus 2009 zullen we over de binomiale boom spreken, ook wel CRR model genoemd naar Cox, Ross en Rubinstein, die dit model voorstelden in 1979 voor het berekenen van prijzen van opties. Hierbij wordt het tijdsinterval van 0 tot T verdeeld in n gelijke tijdstappen. Op ieder van deze tijdstappen kan de prijs omhoog of omlaag gaan zoals beschreven in het simpele model van Sectie 2. Door de constanten u en d geschikt te kiezen convergeert het prijs proces op de boom naar de oplossing van het Black-Scholes prijsmodel.

Referenties

[1] Burdzy, K. 2009. The Search for Certainty. World Scientific Publishing Company, Inc.

[2] De Finetti, B., 1974. Theory of Probability, Volume 1 John Wiley and Sons, New York, NY.

[3] Shreve, S.E., 2005. Stochastic Calculus for Finance I, The Binomial Asset Pricing Model. Springer

[4] Steele, J.M., 2003. Stochastic Calculus and Financial Applications. Springer.

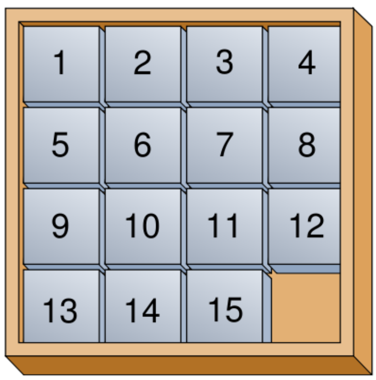
SPELEN MET GROEPENTHEORIE

PETER STEVENHAGEN (UNIVERSITEIT LEIDEN)

ABSTRACT. We gaan in op de groepentheoretische structuur van twee bekende draai- en schuifspelletjes: het 15-puzzeltje van Loyd en de kubus van Rubik.

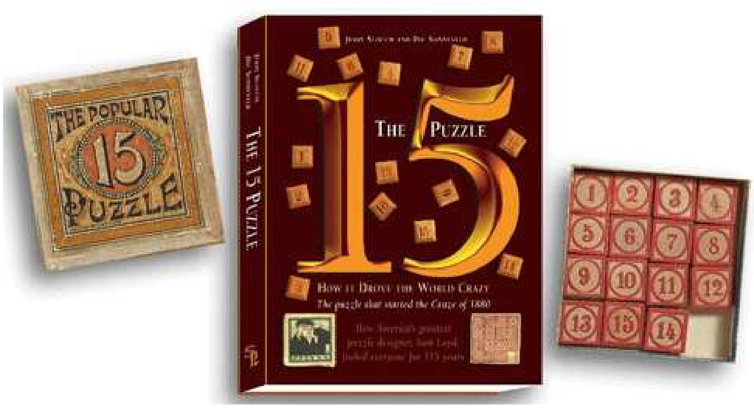
1. INLEIDING

Bijna iedereen is wel eens het bekende puzzeltje tegengekomen dat bestaat uit 15 vierkante blokjes, gerangschikt in een 4×4-vierkant. Doordat er een zestiende blokje ontbreekt, kan men door steeds een blokje in het gat in de puzzel te schuiven de blokjes op allerlei manieren door elkaar gooien. De puzzel bestaat eruit, dat men door geschikt schuiven de vijftien blokjes op de goede plaats krijgt, en het gat in de rechteronderhoek terechtkomt. Er is de hieronder afgebeelde 'kale' variant waarin de blokjes de nummers 1 tot en met 15 dragen, maar het is natuurlijk ook mogelijk de 15 blokjes als bij een normale legpuzzel een mooi plaatje te laten vormen, zoals de Mona Lisa of het logo van een bedrijf dat het puzzeltje aan relaties uitdeelt.



Hoewel het schuifpuzzeltje als Sam Loyd's 15-puzzel bekend staat, en Sam Loyd tot zijn dood in 1911 volhield de bedenker van de puzzel te zijn, is het in de zeventiger jaren van de negentiende eeuw ontstaan uit een puzzel van de Amerikaanse postbeambte Noyes Chapman. In 1880 was de puzzel een grote rage, allereerst in de Verenigde Staten, en kort daarna in Canada en Europa.

Het aardige van de 15-puzzel is dat veel mensen er na enig proberen wel in slagen om een in de war gebrachte puzzel terug te brengen naar de beginstand, maar dat *niemand* in staat lijkt te zijn dit voor elkaar te krijgen, als in de puzzel de blokjes 14 en 15 omgewisseld zijn. Nu is het zo dat de oplosbaarheid van de puzzel uit een gegeven beginstand in principe gemakkelijk aangetoond kan worden door het in zo'n concreet geval daadwerkelijk te doen – maar hoe kun je een ander ervan overtuigen dat dat *niet* mogelijk is als de blokjes 14 en 15 omgewisseld zijn? De verhitte discussies in 1880 laten zich gemakkelijk raden.



2. Permutaties

Alvorens het puzzeltje van Loyd nader te analyseren, gaan we eerst eens kijken op hoeveel manieren we een eindige verzameling van objecten door de war kunnen gooien, en hoe we de manier waarop dat gedaan is efficient aan kunnen geven.

Laat n een positief geheel getal zijn, en stel dat we n verschillende objecten hebben. Om die objecten op n vaste plaatsen neer te zetten hebben we

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

mogelijkheden. Immers, voor het eerste object zijn er n plaatsen te kiezen, voor het tweede daarna nog $n-1$, voor het derde daarna $n-2$, en zo verder tot er voor het laatste object nog maar 1 plaats over blijft.

Het getal $n!$ groeit snel met n, en om in Loyd's puzzeltje de 15 blokjes plus het gat op de 16 plaatsen in het doosje te leggen zijn er al $16! = 20922789888000$ mogelijkheden.

Opgave 1. Hoe lang duurt het om alle mogelijkheden te bekijken, met een snelheid van 1 mogelijkheid per seconde?

Iedere manier om n objecten op n beschikbare plaatsen neer te zetten kan men ook zien als een *afbeelding* die de rij van objecten, die we eenvoudshalve met 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$, n aangeven, in een of andere willekeurige volgorde zet. In andere woorden, zo'n opstelling is op te vatten als een *bijectieve afbeelding*

$$\sigma : \{1,2,3,\ldots,n-1,n\} \longrightarrow \{1,2,3,\ldots,n-1,n\}$$

van de verzameling $X = \{1,2,3,\ldots,n-1,n\}$ naar zichzelf. Men spreekt meestal van een *permutatie* van X, en schrijft S_n of $S(X)$ voor de collectie van dergelijke permutaties. Om een permutatie van X aan te geven kan men voor ieder element van X het beeld aangeven, bijvoorbeeld door dit in een $2\times n$-matrix aan te geven als (voor het geval $n = 12$)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 1 & 11 & 10 & 3 & 4 & 7 & 2 & 12 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Hierbij bestaat iedere kolom uit een element en zijn bijbehorende beeld. Deze notatie beschrijft weliswaar de bijectie σ, maar maakt het niet gemakkelijk om te *rekenen* met dergelijke bijecties: wat gebeurt er bijvoorbeeld als we de afbeelding σ tien of honderd keer achter elkaar toepassen?

Een praktischer notatie krijgt men door $\sigma \in S_n$ te schrijven als een 'product' van *cyclische* permutaties. We noemen een permutatie $\sigma : X \to X$ van een eindige verzameling X een *k-cykel* of *cyclische permutatie van lengte k* als er k verschillende elementen $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ bestaan zo dat σ op $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ werkt als de cyclische verschuiving

$$\begin{tikzcd} x_1 \arrow[r] & x_2 \arrow[r] & x_3 \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & x_{k-1} \arrow[r] & x_k \arrow[lllll, bend left] \end{tikzcd}$$

en alle elementen in $X \backslash \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ op hun plaats laat. We noteren zo'n element als $\sigma = (x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_{k-1}\ x_k)$. Deze notatie is slechts éénduidig op cyclische verschuiving na, omdat bijvoorbeeld $(x_1\ x_2\ x_3)$ en $(x_2\ x_3\ x_1)$ dezelfde permutatie aangeven.

Twee cykels $(x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_{k-1}\ x_k)$ en $(x'_1\ x'_2\ x'_3\ \ldots\ x'_{\ell-1}\ x'_\ell)$ in $S(X)$ heten *disjunct* als geen enkel element x_i gelijk is aan een x'_j. Als men disjuncte cykels achter elkaar toepast, dan maakt het niet uit, in welke volgorde dat gebeurt. Immers, de cykels permuteren in feite 'verschillende' verzamelingen.

Past men niet-disjuncte cykels achter elkaar toe, dan hangt de resulterende permutatie meestal af van de volgorde waarin dat gebeurt. De twee-cykels $(1\ 2)$ en $(2\ 3)$ in S_3 geven achter elkaar toegepast namelijk als resultaat

$$(1\ 2)(2\ 3) = (1\ 2\ 3) \qquad \text{en} \qquad (1\ 3)(1\ 2) = (1\ 3\ 2).$$

Hier gebruiken we de rechts-naar-links-conventie voor het samenstellen van afbeeldingen, dus $(\sigma\tau)(x) = \sigma(\tau(x))$. We gebruiken de productnotatie $\sigma\tau$ voor de samengestelde afbeelding 'eerst τ, dan σ toepassen', en spreken ook gewoon van *producten* van afbeeldingen. Op soortgelijke wijze is de m-de macht σ^m de afbeelding verkregen door m keer σ toe te passen.

Stelling 1. *Iedere permutatie in S_n is te schrijven als product van disjuncte cykels.*

De stelling is intuïtief duidelijk, en we illustreren hem aan de hand van de boven met een 2×12-matrix aangegeven permutatie $\sigma \in S_{12}$. Men vindt men de disjuncte cykelrepresentatie van σ door een willekeurig element te kiezen, zeg 1, en te kijken wat onder herhaald toepassen van σ het beeld wordt. We vinden $1 \mapsto 5 \mapsto 3 \mapsto 11 \mapsto 8 \mapsto 2 \mapsto 1$, een cykel van lengte 6. Kies nu een element buiten deze cykel, bijvoorbeeld 4, en herhaal dit procédé. We vinden $4 \mapsto 10 \mapsto 6 \mapsto 4$, een 3-cykel. Er blijven nog elementen buiten deze cykels over, want we hebben nog maar $6 + 3 = 9$ van de 12 elementen gehad. Het element 7, dat op zijn plaats blijft en een 1-cykel geeft, hoeven we niet op te schrijven. Nemen we 9, dan krijgen we nog de 2-cykel $(9\ 12)$. Het resultaat van de berekening is

$$\sigma = (1\ 5\ 3\ 11\ 8\ 2)(4\ 10\ 6)(9\ 12).$$

Opgave 2. Bereken de permutaties σ^{10} en σ^{100}. Voor welke machten m is σ^m de identiteit?

Op soortgelijke wijze vinden we de disjuncte cykelrepresentatie van een element dat gegeven is als product van niet-disjuncte cykels, zoals $\tau = (1\ 4\ 3\ 6)(7\ 1\ 6)(2\ 7\ 6\ 5) \in S_7$. Het beeld van 1 onder τ berekent men door eerst $(2\ 7\ 6\ 5)$ toe te passen (resultaat: 1), dan (7 1 6) (resultaat: 6) en ten slotte (1 4 3 6) (resultaat: 1). Dus τ laat 1 vast. Voor 2 vinden we $2 \mapsto 7 \mapsto 1 \mapsto 4$, dus $\tau(2) = 4$. Zo doorgaande krijgen we $\tau(4) = 3$, $\tau(3) = 6$, $\tau(6) = 5$ en ten slotte $\tau(5) = 2$. Dit geeft de 5-cykel (2 4 3 6 5), en omdat behalve 1 ook 7 vastgehouden wordt door τ is τ gelijk aan deze 5-cykel.

Opgave 3. Schrijf de elementen $\sigma, \tau \in S_{12}$ gegeven door respectievelijk

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 5 & 1 & 11 & 10 & 3 & 4 & 7 & 2 & 12 & 6 & 8 \end{pmatrix} \text{en} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 2 & 12 & 6 & 8 & 9 & 5 & 1 & 11 & 10 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

als producten van disjuncte cykels, en doe hetzelfde voor $\sigma\tau$ en $\tau\sigma$.

De disjuncte cykelrepresentatie van een element $\sigma \in S_n$ is in essentie uniek: twee zulke representaties kunnen slechts verschillen in de volgorde van de cykels en in het al of niet opnemen van cykels van lengte 1. De cykels in de disjuncte cykelrepresentatie van σ corresponderen met de *banen* waarin de verzameling $\{1, 2, \ldots, n\}$ onder het herhaald toepassen van σ uiteenvalt: i en j komen voor in dezelfde cykel dan en slechts dan als i door herhaald toepassen van σ in j kan worden overgevoerd. Een punt in een baan van lengte 1 correspondeert met een element dat door σ op zijn plaats wordt gelaten en heet een *dekpunt* van de permutatie σ.

Als $\sigma \in S_n$ een product van t disjuncte cykels van lengte $k_1, k_2, \ldots, k_t$ is, waarbij we tevens alle cykels van lengte 1 mee tellen, dan geldt $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_t = n$. We noemen het rijtje $(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_t)$ het *cykeltype* van σ; hierbij is de volgorde van de termen niet van belang. Een cykeltype $(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_t)$ is in feite niets anders dan een manier om n als een som van positieve getallen k_i te schrijven. Men noemt de opdeling $(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_t)$ van n daarom ook wel een *partitie* van n. Voor het element $\sigma \in S_{12}$ is het cykeltype $(6, 3, 2, 1)$, hetgeen correspondeert met de partitie $12 = 6 + 3 + 2 + 1$.

Opgave 4. Zij $p(n)$ het aantal mogelijke cykeltypes van elementen uit S_n. Bereken $p(n)$ voor $n \leq 8$.

***Opgave 5.** Bewijs dat de partitiefunctie p uit de vorige opgave voldoet aan de machtreeksidentiteit

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1 - x^k}.$$

We nemen hier per definitie $p(0) = 1$. *Voor welke $x \in \mathbf{R}$ convergeren deze uitdrukkingen?

Opgave 6. Voor $\sigma \in S_n$ definiëren we $d(\sigma)$ als het aantal dekpunten van σ. Bepaal de gemiddelde waarde

$$\delta_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} d(\sigma)$$

van de functie d op S_n voor $n \leq 5$. *Kun je een algemene formule voor δ_n bewijzen?

Opgave 7. Laat zien dat het aantal dekpuntvrije permutaties in S_n gelijk is aan $n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. Bereken welke fractie van de elementen dit is voor $n \leq 6$, en concludeer dat bij het willekeurig trekken van Sinterklaaslootjes in een niet al te klein gezin de kans dat niemand zichzelf trekt ongeveer gelijk is aan $1/e = 0{,}367879\ldots$.

3. Groepentheorie

We hebben nu geleerd hoe we met permutaties in S_n kunnen rekenen, en de intuïtief duidelijke rekenregeltjes voor dergelijke permutaties maken S_n tot het standaardvoorbeeld van een *eindige groep*. Groepen komen overal in de wiskunde voor, en hun definitie is erg eenvoudig.

Men noemt een verzameling G voorzien van een 'vermenigvuldiging' $G \times G \longrightarrow G$ een *groep* als de vermenigvuldigafbeelding $(a, b) \mapsto ab = a \cdot b$ aan drie natuurlijke eisen voldoet:

1. er is een eenheidselement $1 \in G$ waarvoor geldt
$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \qquad \text{voor alle } a \in G;$$
2. de vermenigvuldiging is *associatief*: voor elk drietal elementen $a, b, c \in G$ geldt $(ab)c = a(bc)$;
3. ieder element $a \in G$ heeft een *inverse* $a^{-1} \in G$.

De bewerking op G noemt men generiek *vermenigvuldiging*, maar voor concrete groepen (permutatiegroepen, symmetriegroepen, ...) spreekt men ook van *samenstelling*, en noemt het eenheidselement de *identiteit*.

Merk op dat van de vermenigvuldiging in een groep *niet* geeist wordt dat steeds $ab = ba$ geldt: elementen hoeven (net als permutaties) niet noodzakelijk te *commuteren*. Is dit in G wel altijd het geval, dan heet G *abels*, naar de Noorse wiskundige Abel (1802–1829). In het abelse geval noemt men de groepsoperatie ook wel *optelling*, en schrijft $a \cdot b = a + b$ voor de *som* van elementen in G. Het eenheidselement wordt in dit geval als 0 genoteerd, en de inverse van a als $-a$.

Opgave 8. Laat zien dat de verzameling $\mathbf{R}$ van reële getallen een groep vormt onder de gewone optelling, maar niet onder de vermenigvuldiging. Ga na dat $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ wel een groep vormt onder vermenigvuldiging.

Opgave 9. Laat zien dat de verzameling $\mathbf{Z}$ van gehele getallen een groep vormt onder de gewone optelling, maar niet onder de vermenigvuldiging. Ga na dat $\mathbf{Z}^* = \{\pm 1\}$ wel een groep vormt onder vermenigvuldiging.

Als de onderliggende verzameling G van een groep eindig is, noemt men de groep G eindig, en het aantal elementen $\#G$ de *orde* van G.

Stelling 2. *Onder samenstelling van permutaties vormt S_n een groep van orde $n!$.*

Deze stelling is meer een formalisatie van iets dat we al lang weten dan een diep inzicht. Hij betekent echter dat alle fundamentele eigenschappen van algemene groepen in het bijzonder gelden indien we over permutaties praten. Een voorbeeld: voor ieder element a van een eindige groep G bestaat er een kleinste positief geheel getal m waarvoor $a^m = 1$ geldt. Bovendien is deze kleinste m, die de *orde* van a genoemd wordt, een deler van de groepsorde $\#G$.

Opgave 10. Bewijs deze uitspraken voor de groep S_n.

De algemene groepentheorie behoort tegenwoordig tot de fundamenten van de wiskunde, om de simpele reden dat groepsstructuren overal voor blijken te komen. In het korte bestek van dit stukje zullen we er niet veel over kunnen zeggen, en zullen we ons beperken tot het maken van een *afbeelding* van de groep S_n naar de tekengroep $\{\pm 1\}$ van een soort die 'bij groepen hoort': een *groepshomomorfisme*.

Definitie. *Een afbeelding* $f : G \longrightarrow G'$ *tussen groepen heet een homomorfisme als*

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

geldt voor ieder tweetal elementen $a, b \in G$.

Een bekend voorbeeld van een homomorfisme is de *reductieafbeelding* $\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, die aan elk geheel getal a zijn rest bij deling door het positieve getal n toevoegt, of beter gezegd, zijn *restklasse modulo* n. Voor $n = 2$ heten de beide klassen in $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ wel 0 =even en 1=oneven, en men gaat gemakkelijk na dat $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ op natuurlijke wijze een optelgroep met twee elementen vormt, en algemener $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ een optelgroep van orde n. Rekenen in $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ staat bekend als *rekenen modulo* n.

De groep $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ van orde 2 is de enig mogelijke groep van orde twee, en men kan hem zoals boven noteren als optelgroep met elementen 0 en 1 of even en oneven, of als vermenigvuldiggroep $\{\pm 1\}$ met elementen 1 en -1.

Stelling 3. *Voor iedere* $n \geq 1$ *bestaat er een uniek homomorfisme*

$$f : S_n \to \{\pm 1\}$$

met de eigenschap dat iedere twee-cykel $\sigma = (i\ j) \in S_n$ *teken* $f(\sigma) = -1$ *heeft.*

Het is niet zo moeilijk om in te zien dat er niet meer dan één homomorfisme f met de genoemde eigenschap kan bestaan, omdat iedere permutatie in S_n verkregen kan worden als een product van twee-cykels, en het teken van zo'n product is dan vanwege de homomorfie-eigenschap van f het product van de tekens -1 van elk van de twee-cykels in het product.

Opgave 11. Bewijs dat iedere permutatie een product van twee-cykels is. [Hint: inductie naar n.]

Omdat een gegeven permutatie σ op verschillende manieren als product van twee-cykels geschreven kan worden, bijvoorbeeld voor

$$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 4)(1\ 3)(1\ 2) = (2\ 3)(1\ 2)(1\ 3)(2\ 4)(2\ 3),$$

is helemaal niet duidelijk dat dit steeds hetzelfde antwoord geeft. We definiëren f door te kijken naar de functie $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ gegeven door

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

We merken allereerst op dat F niet de nulfunctie is. Voor $\sigma \in S_n$ beschouwt men nu de functie $\sigma F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ gegeven door

$$(\sigma F)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}).$$

Deze functie is op teken na gelijk aan F, en we definiëren $f(\sigma) \in \{\pm 1\}$ door

$$\sigma F = f(\sigma)F.$$

Neemt men σ gelijk aan een twee-cykel $(i\ j)$, dan ontstaat σF uit F door de factor $x_i - x_j$ in de definitie van F door $x_j - x_i$ te vervangen. Immers, alle andere factoren die x_i of x_j bevatten kunnen we paarsgewijs samennemen, met één paar per element $k \neq i, j$. Voor iedere k krijgen we één van de onderstaande vier paren, afhankelijk van de ligging van k ten opzichte van i en j,

$$(x_i - x_k)(x_j - x_k), \qquad (x_i - x_k)(x_k - x_j), \qquad (x_k - x_i)(x_j - x_k), \qquad (x_k - x_i)(x_k - x_j)$$

en ieder van deze factoren is invariant onder de twee-cykel $(i\ j)$. Dit laat zien dat $f(\sigma) = -1$ geldt voor een twee-cykel σ.

Uit de relatie $(\sigma\tau)(F) = \sigma(\tau F)$ vinden we gemakkelijk de homomorfie-eigenschap $f(\sigma\tau)F = f(\sigma)f(\tau)F$, en dit bewijst Stelling 3.

Op grond van onze stelling spreken we ook wel van de *pariteit* van permutaties in S_n, die even (teken 1) of oneven (teken -1) kan zijn. Voor een k-cykel

$$(1\ 2\ 3\ 4\ \ldots k-1\ k) = (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(4\ 5)\ldots(k-1\ k)$$

is het teken vanwege de homomorfie-eigenschap van f gelijk aan $(-1)^{k-1}$, en voor een willekeurig element $\sigma \in S_n$ van cykeltype $(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_t)$ vinden we

$$f(\sigma) = (-1)^{\sum_{i=1}^{t}(k_i - 1)} = (-1)^{n-t}.$$

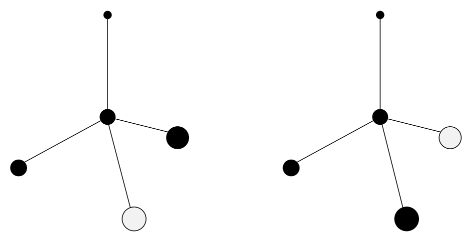
Aan de hand van de tekenafbeelding kan men allerlei groepentheoretische algemeenheden illustreren. Net zoals de deelverzameling van even getallen in $\mathbf{Z}$ onder de optelling zelf weer een optelgroep vormt, een *ondergroep* van $\mathbf{Z}$, vormt de deelverzameling van even permutaties in S_n onder samenstelling ook weer een groep, de ondergroep van S_n die als de *alternerende groep* A_n bekend staat. Voor $n > 1$ is de orde van A_n precies de helft van die van S_n, dus $\frac{1}{2}n!$, en is het de ondergroep van elementen die als producten van drie-cykels geschreven kunnen worden.

Opgave 12. Geef voor deze uitspraken een bewijs.

Opgave 13. Zij $n > 1$ geheel, en laat $f : S_n \to \mathbf{R}$ een *niet-constante* reëelwaardige functie op S_n zijn die voldoet aan de multiplicatieve eigenschap $f(ab) = f(a)f(b)$. Bewijs dat f de tekenafbeelding is.

Opgave 14. Zij $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ een standaardbasis van $\mathbf{R}^n$. Voor $\sigma \in S_n$ definiëren we de lineaire afbeelding $M_\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ door $\sum_i a_i e_i \mapsto \sum_i a_i e_{\sigma(i)}$. Bewijs dat het teken $f(\sigma)$ van σ gelijk is aan de determinant $\det(M_\sigma)$. [Men noemt de matrix behorende bij M_σ wel een *permutatiematrix*.]

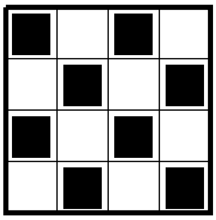
Opgave 15. Laat zien dat de groep van symmetrieën van een tetraëder T geïdentificeerd kan worden met de groep S_4 van permutaties van de 4 hoekpunten van T. Bewijs dat zo de ondergroep $A_4 \subset S_4$ gelijk wordt aan de groep van symmetrieën van T voortgebracht door rotaties, oftewel de 'fysiek realiseerbare' symmetrieën. Concludeer dat onderstaande moleculen *enantiomeren* zijn, congruente moleculen die niet door draaiing in elkaar overgevoerd kunnen worden.



4. Onoplosbaarheid van de 15-puzzel

We gebruiken de tekenafbeelding om te bewijzen dat Loyd's puzzeltje niet kan worden opgelost indien alleen de blokjes 14 en 15 verwisseld dienen te worden. We geven hiertoe het ontbrekende blokje het nummer 16, en merken op dat een 'zet' in het spelletje bestaat uit een verwisseling van blokje 16 en een naburig blokje. Wat we uitvoeren zijn kennelijk twee-cykels in de permutatiegroep S_{16}. Als na een aantal zetten blokje 16 zich weer rechtsonder bevindt, dan is dit aantal zetten *even* geweest: immers, in het aangegeven schaakbordpatroon beweegt blokje 16 steeds van een zwart blokje naar een wit blokje, dus na een oneven aantal zetten bevindt hij zich nooit op een zwart blokje. Het product van een even aantal twee-cykels is een *even* permutatie, en dat kan nooit de gewenste twee-cykel (14 15) zijn.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	



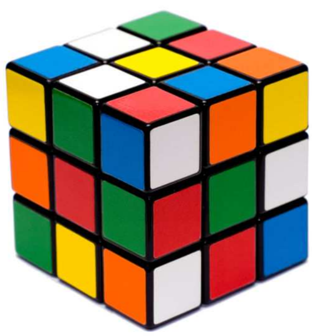
WA	AR	IS	HI
ER	HE	TP	AR
IT	EI	TS	PR
OB	EM	LE	

Opgave 16. Laat zien dat het rechts afgebeelde puzzeltje, waar de blokjes 'LE' en 'EM' verwisseld moeten worden, wél oplosbaar is.

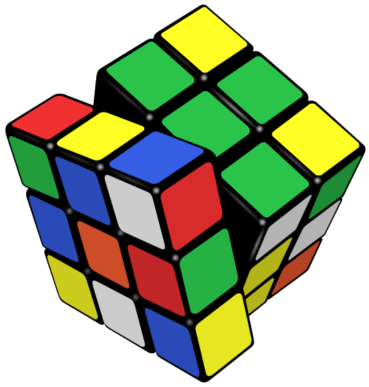
Het is in feite zo, dat de pariteitsrestrictie op de bereikbare standen in het schuifpuzzeltje van Loyd de *enige* beperking is die het spelletje kent, en dat de posities van het spelletje in twee banen van $\frac{1}{2} \cdot 16!$ standen elk uiteenvallen. Alle standen binnen dezelfde baan zijn door schuiven in elkaar over te voeren, en door te schuiven blijft men steeds binnen een vaste baan.

5. De groep van Rubik's kubus

Een puzzel die aanzienlijk ingewikkelder is dan de 15-puzzel is de puzzel die ruim dertig jaar geleden door door de Hongaarse ingenieur Rubik ontworpen werd, en die wereldwijd furore maakte als de kubus van Rubik.



De kubus bestaat uit $3 \times 3 \times 3 = 27$ blokjes, en door een vernuftige constructie zijn alle zijvlakken van $3 \times 3 = 9$ kubusjes kwartslagen te draaien om de as die het middelpunt van het zijvlak met het centrum van de kubus verbindt. In de beginstand hebben de 9 kleine kubus-zijvlakjes die het zijvlak van de grote kubus vormen allen dezelfde kleur, en heeft de grote kubus 6 verschillend gekleurde zijvlakken. Een ieder die de kubus wel eens in handen heeft gehad, weet echter dat een paar slagen met verschillende zijvlakken voldoende zijn om de kubus danig door de war te gooien, en dat het nu een hels karwei is om de kubus in zijn oorspronkelijke staat terug te brengen!



De standen van Rubik's kubus kan men als in het geval van Loyd's puzzeltje op groepentheoretische wijze beschrijven, maar de details zijn wat gecompliceerder. Van de 26 buitenblokjes die we zien blijven de 6 centrumblokjes van de zijvlakken onder alle draaiingen op hun plaats, terwijl de 8 hoekblokjes en de 12 ribbenblokjes onderling verwisseld worden. Dit geeft al $8! \cdot 12!$ mogelijkheden om ribben- en hoekblokjes te verwisselen, maar er is meer. Een ribbenblokje heeft behalve een plek op de kubus ook nog een *oriëntatie*: men kan het op 2 manieren in de kubus zetten, en het verschil tussen de twee manieren is dat de beide kleurvlakjes onderling verwisseld worden. Op soortgelijke manier heeft een hoekblokje 3 mogelijk standen op een geven hoek: men kan immers het blokje een derde slag draaien om de lichaamsdiagonaal van de kubus. Dit geeft maar liefst

$$8! \cdot 12! \cdot 2^8 \cdot 3^8 = 519\,024\,039\,293\,878\,272\,000 \approx 5.2 \cdot 10^{20}$$

manieren om een kubus uit losse blokjes in elkaar te zetten.

Net als bij het Loyd-puzzeltje kunnen niet alle standen uit de beginstand bereikt worden. In het geval van Rubik's kubus zijn er 12 banen, die voortkomen uit drie restricties op de door draaiingen te realiseren permutaties. De meest zichtbare restrictie komt voort uit het feit dat alle kwartslagen van zijvlakken van de kubus 4 hoekblokjes en 4 ribbenblokjes elk in een 4-cykel permuteren. Het teken van de permutatie van de hoekblokjes, opgevat als element van S_8, zal dus na een aantal draaiingen van de kubus altijd gelijk zijn aan het teken van de permutatie van de ribbenblokjes, opgevat als element van S_{12}. In het bijzonder zal men er nooit in slagen *alleen* 2 hoekblokjes om te wisselen of om *alleen* 2 ribbenblokjes om te wisselen, met welke bijbehorende oriëntatieverandering dan ook.

Naast bovenstaande tekenrestrictie op de permutaties is er ook een oriëntatierestrictie op zowel de ribbenblokjes als de hoekblokjes. Kijkt men namelijk naar de kubusdraaiingen die alle blokjes op hun plaats houden, en die dus alleen maar de oriëntaties van ribben- en hoekblokjes mogen veranderen, dan ontdekt men dat het niet mogelijk is de oriëntaties van de ribbenblokjes onafhankelijk van elkaar te veranderen: het aantal ribbenblokjes waarvan men de oriëntatie verandert blijkt altijd *even* te zijn. Met andere woorden: met de oriëntatie van 11 ribbenblokjes ligt die van het twaalfde vast. Bij de hoekblokjes treedt een vergelijkbar fenomeen op: men kan van 7 hoekblokjes de oriëntatie naar wens veranderen, maar van voor het achtste blokje ligt de oriëntatie dan vast. Dit brengt het totale aantal van kubusstanden dat door draaiing te realiseren is, en daarmee de orde van de kubusgroep, op

$$\tfrac{1}{12} \cdot 8! \cdot 12! \cdot 2^8 \cdot 3^8 = 2^{27} \cdot 3^{14} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000 \approx 4.3 \cdot 10^{19}.$$

Meer structureel kan men zeggen dat de kubusgroep K in zijn permutatie-actie op de blokjes aanleiding geeft tot een homomorfisme

$$p : K \to S_8 \times S_{12}$$

waarvan het beeld P_K bestaat uit de ondergroep van orde $\frac{1}{2} \cdot 8! \cdot 12!$ van permutatieparen (σ, τ) met gelijk teken $f(\sigma) = f(\tau)$. De kubuselementen die door p naar de identiteit gestuurd worden, en dus alle blokjes op hun plaats houden, vormen de ondergroep O_K van elementen die alleen de 12 ribbenblokoriëntaties en de 8 hoekblokoriëntaties veranderen. Die ondergroep O_K kan men beschrijven als de ondergroep van

$$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{12} \times (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^8$$

bestaande uit de elementen waarvan zowel de 12 ribbenblokoriëntaties als de 8 hoekblokoriëntaties optellen tot 0 in respectievelijk $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ en $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. Die ondergroep heeft orde $2^{11} \times 3^7$.

De kubusgroep zelf kan men nu beschrijven als een zogenaamd *semi-direct product* van $O_K \rtimes P_K$, en deze beschrijving is nuttig bij het analyseren van kubussymmetriën.

6. Optimale oplossingen

De groepen die het Loyd-puzzeltje en Rubik's kubus beschrijven geven niet direct antwoord op alle interessante vragen die men bij deze spelletjes al snel stelt, en die betrekking hebben op het oplossen van de spelletjes.

In het geval van Loyd's puzzeltje kan men met een betrekkelijk klein aantal eenvoudige trucjes de puzzel systematisch oplossen. In het geval van Rubik's kubus is een aanzienlijk groter aantal standaardtrucs nodig, en men kan dergelijke trucs uitgespeld vinden op internet.

Een systematische manier om een schuif- of draaispelletje op te lossen is vaak niet de *snelste* manier om dit te doen, en men kan zich afvragen of en hoe een *optimale* oplossing gevonden kan worden, die in een minimaal aantal zetten de puzzel oplost.

In het geval van Loyd's puzzeltje telt men zetten, en het maximaal aantal zetten dat nodig is om de puzzel naar de eindstand te schuiven is niet meer dan 80.

Voor Rubik's kubus is de vraag hoeveel 'zetten' ten hoogste nodig zijn om de kubus naar de beginstand terug te draaien aanzienlijk moeilijker. Men moet hier ook een keuze maken: zijn de kwartslagen van de zijvlakken de zetten, en telt een halve slag daardoor als twee zetten, of wil men halve slagen als enkele zetten tellen?

Tellen we halve slagen als zetten, dan zijn er voor de eerste zet 18 mogelijkheden: 6 zijvlakken die elk op drie manieren gedraaid kunnen worden (kwartslag linksom, kwartslag rechtsom, halve slag). De daarop volgende zet wordt met een ander zijvlak gedaan, en daarvoor zijn dan 15 mogelijkheden. Na n slagen kan men dus ten hoogste $18 \cdot 15^{n-1}$ verschillende standen van de kubus bereiken, en voor $n = 16$ is dit aantal nog kleiner dan de orde van de kubusgroep. Dit laat zien dat er configuraties zijn die niet met minder dan 17 slagen bereikt – en dus opgelost – kunnen worden.

Voor bovengrenzen kan men een systematische methode nemen, en tellen hoveel slagen die maximaal moet maken. Met de betere methoden komt men onder de 100, maar dit is verre van optimaal. De Brit Thistlethwaite vond in 1981 een groepentheoretische methode gebaseerd op een keten

$$K = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset G_4 = 1$$

van ondergroepen van de kubusgroep. Hier is G_1 de ondergroep van permutaties verkregen als met boven- en ondervlak van de kubus alleen halve draaien worden gemaakt, G_2 de ondergroep waar dit ook voor het linker- en rechterzijvlak geldt, en G_3 de ondergroep van posities die met enkel halve draaien verkregen kunnen worden. De methode probeert, gegeven een willekeurig element van K, eerst met een klein aantal zetten van $K = G_0$ in G_1 te komen, dan met zetten van G_1 in G_2, en zo verder tot de identiteit in $G_4 = 1$ bereikt is.

Het probleem om van een ondergroep in een kleinere te komen heeft een moeilijkheid die van het *quotient* van hun ordes afhangt, en dit maakt het mogelijk het probleem in de grote groep K te reduceren tot een aantal kleinere problemen, die elk klein genoeg zijn om met computers geanalyseerd te worden. Verbeteringen van Thistlethwaite's methode hebben het maximaal vereiste aantal zetten steeds verder omlaag gebracht, van 52 voor de originele methode tot minder dan 30. Met supercomputers werd 26 als bovengrens bereikt, en inmiddels wordt 22 geclaimd.

Omdat de *superflip*, de stand waarin slechts de oriëntatie van de 12 ribbenblokjes 'geflipt' is, niet met minder dan 20 zetten bereikt kan worden, betekent dit dat wat men wel de *diameter* van de kubusgroep noemt nu bijna exact bekend is.

Literatuur.

1. M. A. Armstrong, *Groups and symmetry*, Springer Undergraduate Text, 1988.
   [Een goed leesbare inleiding tot de groepentheorie.]
2. Jan van de Craats, *De magische kubus van Rubik* (1981), Muiderkring.
   [Een van de eerste boekjes, Nederlandstalig, met een oplossingsmethode, mooie patronen en een discussie van de eerste kubusvarianten.]
3. P. Stevenhagen, *Algebra 1*, Mathematisch Instituut, Leiden, 2009; een online versie is beschikbaar op `websites.math.leidenuniv.nl/algebra`.
   [De syllabus groepentheorie die in de propedeuse gebruikt wordt in de Leids-Delftse opleiding.]

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
E-mail: `psh@math.leidenuniv.nl`

Is democratie wiskundig onmogelijk?

Drs. Vincent van der Noort

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Bij de Britse lagerhuisverkiezingen op 5 mei 2005 won Labour 55% van de zetels met slechts 35% van de stemmen. In 2000 won Bush de Amerikaanse presidentsverkiezingen met 500.000 stemmen minder *dan Gore. Bij veel referenda is het voor 'voor'-stemmers beter om thuis te blijven dan om te gaan stemmen. Fraude? Omkoperij? Intimidatie? Nee, nog erger: simpele wiskunde.*

Rare verschijnselen zoals hierboven worden in de wiskunde *verkiezingsparadoxen* genoemd. Door de manier waarop de verkiezingen georganiseerd zijn, kan de uitkomst van de verkiezingen anders zijn dan je logischerwijze zou verwachten. In het geval van Groot Brittanië en Amerika is de oorzaak het districtenstelsel (zie kader). Het is geen groot nieuws dat dit soort stelsels tot verkiezingsparadoxen kunnen leiden. Schokkender is het dat in *ieder* kiessysteem dit soort paradoxen kunnen voorkomen. In 1951 bewees ene Kenneth Arrow dat geen enkel kiessysteem helemaal eerlijk is, en dat volmaakte democratie dus wiskundig onmogelijk is. Dit schokkende feit was goed voor een Nobelprijs economie.

Zeker met alle veranderingen in de organisatie van de EU die voor de deur staan, is het interessant om te kijken wat voor paradoxen er zoal mogelijk zijn. Daarom in dit artikel een groot aantal (vereenvoudigde) voorbeelden. Ook zal ik uitleggen wat Keneth Arrow bedoelt met 'volmaakte democratie'. Wie meer wil weten over het bewijs dat dit een onhaalbare kaart is of over de kiessystemen zoals die in de Europese grondwet staan, verwijs ik naar de links onderaan dit artikel. Speciaal voor scholieren/docenten is er een verkorte versie van dit artikel beschikbaar met vragen en opdrachten

Verschillend kiessysteem, verschillende uitslag

Drie vrienden (die zoals de meeste vrienden in wiskunderaadsels Anna, Bob en Charles heten) hebben na jaren zoeken eindelijk een mooi huis in Amsterdam gevonden waar ze kunnen gaan wonen. Ze zijn nu bezig met de inrichting van hun gemeenschappelijke woonkamer en zoeken op de meubelboulevard in Beverwijk naar een stoel. Anna is helemaal weg van een rieten rotanstoel, Bob gaat voor een lederen fauteuil en Charles is zeer gecharmeerd van een multifunctionele klapstoel. Ze zijn het erover eens dat het een van deze stoelen moet worden, want alle andere stoelen zijn of te lelijk of te duur. Bob wil echter absoluut de rieten rotanstoel niet, omdat hij als driejarige ooit zijn vinger aan zo'n soort stoel heeft open gehaald. Anna heeft ernstige bezwaren tegen de multifunctionele klapstoel, omdat dat helemaal geen sfeer in huis geeft, en Charles is fanatiek tegen de lederen fauteuil omdat die zou betekenen dat hij zijn kat de hele dag krampachtig in zijn eigen kleine kamertje opgesloten zou moeten houden.

Omdat ze het niet eens worden besluiten ze te stemmen. De voorkeuren zijn dus als volgt verdeeld:

	1e keus	**2e keus**	**3e keus**
Anna	Rotan	Leer	Klapstoel
Bob	Leer	Klapstoel	Rotan
Charles	Klapstoel	Rotan	Leer

Gewoon per stoel stemmen heeft geen zin: voor iedere stoel is er precies een stem. Daarom stelt Anna voor eerst tussen de Lederen Fauteuil en de Multifunctionele Klapstoel te stemmen, en dan tussen de winnaar en de Rieten Rotanstoel. Bij iedere stemronde moet de uitslag 2 tegen 1 of 3 tegen 0 zijn, dus is er in elk geval een uitslag.

Wat Anna er niet bij vertelt, is dat ze heel goed weet wat die uitslag zal zijn. Eerst verplettert de Fauteuil de Klapstoel met 2 stemmen (Bob en zijzelf) tegen 1, om vervolgens het loodje te leggen tegenover de Rotanstoel, die op zijn beurt ook op twee stemmen kan rekenen (dit keer van Charles en Anna)

Bob is hier om begrijpelijke redenen fanatiek op tegen. Hij doet een ander voorstel: eerst stemmen tussen de Multifunctionele Klapstoel en de Rieten Rotanstoel en dan tussen de winnaar en de Lederen Fauteuil. Bob kan niet wachten om de Rieten Rotanstoel roemloos ten onder te zien gaan in zijn verkiezingsstrijd tegen de Klapstoel. Dat de Lederen Fauteuil vervolgens de Multifunctionele klapstoel ook nog eens voorbijstreeft in de tweede ronde is helemaal mooi meegenomen. Het wordt aan de lezer overgelaten te bedenken met wat voor alternatief kiessysteem Charles op de proppen zal komen.

Uiteindelijk krijgt Anna haar zin. Er wordt eerst gestemd tussen de Fauteuil en de Klapstoel en dan tussen de winnaar en de Rieten Rotanstoel. Bob voelt de bui al hangen, en omdat zijn rotantrauma zo sterk is dat hij liever verhuist dan op een rotan stoel te moeten zitten, besluit hij in de eerste stemronde niet op zijn eerste keus (de Lederen Fauteuil) maar op zijn tweede keus (de Multifunctionele Klapstoel) te stemmen. Tot ontsteltenis van Anna wint de Klapstoel nu de eerste ronde, en alsof het allemaal niet erg genoeg is, de tweede ronde ook. Charles kan zijn geluk niet op, Bob is blij dat hij erger heeft weten te voorkomen en Anna, tsja, Anna zit er maar mooi mee.

Op zoek naar het perfecte kiessysteem

Nu we weten dat verschillende kiessystemen tot verschillende uitslagen leiden, kunnen we ons afvragen: wat is het beste kiessysteem? Bij welk kiessysteem komt de uitslag het best overeen met de meningen van de kiezers? Deze vraag is nogal moeilijk te beantwoorden omdat "de mening van de kiezers" een begrip is waarvan we niet goed weten wat het is. Iedere kiezer heeft zo zijn eigen mening. Wat we bijvoorbeeld wel kunnen zeggen dat er mis is met het Nederlandse kiessysteem, is dat geen rekening houdt met wat de kiezers vinden van de partijen op wie ze niet stemmen. Als de meerderheid van de kiezers liever partij A heeft dan partij B, dan zouden we willen dat A ook meer zetels haalt dan B. Ook als een groot deel van die kiezers op partij C stemt. In het Nederlandse systeem is dit niet altijd het geval. Laten we kijken naar het volgende vereenvoudigde voorbeeld.

Een pasopgerichte politieke partij, moet een kleur kiezen. rood, blauw en groen zijn al geclaimd, paars is ook geen optie en dus gaat de keus tussen geel, oranje en turquoise. Op het congres dat deze belangrijke beslissing moet nemen zijn 31 leden aanwezig. De voorkeuren zijn als volgt verdeeld:

1e keus	2e keus	3e keus	Aantal
Geel	Turquoise	Oranje	5 leden
Geel	Oranje	Turquoise	7 leden
Turquoise	Geel	Oranje	3 leden
Turquoise	Oranje	Geel	7 leden
Oranje	Geel	Turquoise	3 leden
Oranje	Turquoise	Geel	6 leden

Net als bij de echte verkiezingen mogen de leden hun eerste keus op een briefje schrijven.
De uitslag wordt dus:
1. Geel met 12 stemmen
2. Turquoise met 10 stemmen
3. Oranje met 9 stemmen

Als we echter de kleuren twee aan twee zouden vergelijken krijgen we een heel andere uitslag: meer dan de helft van de leden (16 namelijk) heeft liever Oranje dan Turquoise, en ook meer dan de helft (ook 16) heeft liever Oranje dan Geel. Het lijkt er dus op dat Oranje veruit de populairste kleur is. Bovendien hebben 16 leden liever Turquoise dan Geel. Geel kunnen we dus wel aanmerken als de grote verliezer. Deze uitslag:

1. Oranje (Want populairder dan zowel Turquoise als Geel)
2. Turquoise (Want populairder dan Geel, maar minder populair dan Oranje)
3. Geel (Want minder populair dan zowel Oranje als Turquoise)

is echter precies tegengesteld aan de vorige. Welke is nou eerlijker?

Meeste stemmen gelden vs Twee aan twee vergelijken
Over het algemeen wordt 'twee aan twee vergelijken' wat bij de tweede uitslag gedaan eerlijker beschouwd dan 'de meeste stemmen gelden', wat tot de eerste uitslag leidde. De reden hiervoor is dat twee aan twee vergelijken aan een aantal redelijke eisen voldoet, waaraan de meeste stemmen helaas niet altijd kan voldoen. De eerste eis is al besproken: als een meerderheid van de kiezers liever A dan B heeft, dan willen we dat A ook hoger eindigt dan B. En in het extreme geval dat ALLE kiezers liever partij A dan partij B hebben, willen we natuurlijk helemaal dat A meer zetels haalt dan B. Zelfs hieraan is in het Nederlandse kiessysteem niet altijd voldaan (bedenk zelf hoe).

De tweede eis wordt duidelijk uit het volgende voorbeeld. Stel dat de zeven kiezers die als volgorde
“1. Geel 2. Oranje 3. Turquoise” hadden, zich op het laatste moment bedenken en besluiten dat ze Turquoise eigenlijk mooier vinden dan Oranje (maar Geel nog steeds mooier dan de andere twee). Je zou redelijkerwijs mogen verwachten dat zo'n aardverschuiving in "de mening van de kiezers" van grote invloed is op de uitslag van de verkiezingen. Dit is bij de meeste stemmen gelden echter helemaal niet het geval!

Wat is met de nieuwe voorkeuren:

1^e keus	**2^e keus**	**3^e keus**	**Aantal**
Geel	Turquoise	Oranje	12 leden
Turquoise	Geel	Oranje	3 leden
Turquoise	Oranje	Geel	7 leden
Oranje	Geel	Turquoise	3 leden
Oranje	Turquoise	Geel	6 leden

de ‘nieuwe’ uitslag als ieder lid zijn 1e keus op een briefje schrijft? En wat is de 'nieuwe' uitslag bij twee aan twee vergelijken?
‘Uw mening telt’ geldt dus meer bij twee aan twee vergelijken dan bij ‘De meeste stemmen gelden’

Iets meer in het algemeen is het bezwaar tegen het systeem dat in Nederland gebruikt wordt, dat het geen rekening houdt met wat de kiezers vinden van de partijen waar ze niet op stemmen. Twee aan twee vergelijken is niet de enige manier om hier wat aan te doen. Er zijn talloze andere kiessystemen te bedenken en bedacht die op dit punt ‘eerlijker’ lijken dan het gewone Nederlandse systeem. Ik roep van harte op zo’n systeem te bedenken.

Ik heb getwijfeld over België
Er is zelfs nog een derde punt waarop twee-aan-twee vergelijken beter scoort dan de meeste stemmen gelden, genaamd Onafhankelijkheid van Irrelevante Alternatieven. Bekijk het volgende voorbeeld.

Een schoolklas gaat een weekje op kamp en mag kiezen uit drie bestemmingen: China, Japan en België.

De meningen van de 20 leerlingen zijn als volgt verdeeld:

1^e keus	**2^e keus**	**3^e keus**	**Aantal**
België	China	Japan	16 leerlingen
België	Japan	China	3 leerlingen
Japan	België	China	1 leerling (Piet)

Er wordt gestemd op de gebruikelijke manier en de uitslag is als volgt:

1. België (met 16 stemmen)
2. Japan (met 1 stem)
3. China (met 0 stemmen)

De klas besluit naar België te gaan. ’s Avonds is echter op het nieuws dat in België oorlog is uitgebroken. De ouderraad acht het niet verantwoordelijk om in deze omstandigheden naar België te gaan, en de klas kiest voor zijn (volgens de verkiezingen) tweede keus: Japan. Dit is natuurlijk niet helemaal eerlijk. Als de oorlog een dag eerder was uitgebroken en er meteen tussen alleen China en Japan gestemd was, had China overtuigend met 16 tegen 4 gewonnen. Dit mankement van het kiessysteem nodigt natuurlijk uit tot vreselijke fraude. Stel dat de keus oorspronkelijk alleen tussen China en Japan ging. Piet voelde al aankomen dat hij vreselijk ging verliezen, en zat danig met de handen in het haar. Toen hoorde hij opeens een piepje in zijn broekzak. Zijn sms-nieuwsdienst vertelde hem als eerste en als enige over de oorlog in België die zojuist begonnen was. Prompt lanceerde hij het "Irrelevante Alternatief" België als derde vakantiebestemming. Hij gaf hoog op van de goede keuken en de frisse boslucht en al zijn klasgenoten gingen voor de bijl. België won de verkiezingen als hierboven, met als goede tweede Japan. s Avonds zag iedereen het nieuws en de volgende dag besloot de klas naar Japan te gaan, in plaats van het logischer lijkende China. We zeggen dat dit de meeste stemmen gelden systeem niet 'onafhankelijk van irrelevante alternatieven' is.

Ga na dat twee aan twee vergelijken wel onafhankelijk van irrelevante alternatieven is: dwz het toevoegen en achteraf weer weghalen van een extra keuzemogelijkheid verandert niks aan de verhoudingen tussen de andere mogelijkheden.

Twee aan twee vergelijken in de praktijk

Dit alles roept twee vragen op: ‘merken we nou ook wat van in het echt?’ en ‘als twee aan twee vergelijken dan zoveel beter is dan de meeste stemmen gelden, waarom doen we dat dan niet?’

Het antwoord op de eerste vraag is waarschijnlijk ja. Op grond van opiniepeilingen is dit berekend voor een aantal Nederlandse tweede kamer verkiezingen (zie de links onderaan het artikel). In de verkiezingen van 1994 won D66 bij twee aan twee vergelijken van de PvdA, van het CDA en van de VVD, maar al deze partijen haalden meer zetels dan D66.

Dan de vraag waarom twee aan twee vergelijken niet wordt toegepast. De reden is vrij eenvoudig: er is niet altijd een uitslag. Kijk nog eens naar het voorbeeld van de stoelen. Bij twee aan twee vergelijken wint de Rieten Rotanstoel van de Lederen Fauteuil, de Lederen Fauteuil op zijn beurt wint weer van de Multifunctionele Klapstoel, maar de Multifunctionele Klapstoel wint van de Rieten Rotanstoel. Twee aan twee vergelijken geeft misschien het best de “mening van de samenleving als geheel” weer, maar de samenleving als geheel denkt niet altijd logisch na.

We zouden natuurlijk (zoals Anna voorstelt in het stoelenvoorbeeld) een van de drie vergelijkingen niet kunnen houden, maar in dat geval worden de stoelen niet gelijkwaardig behandeld. Als extra eis aan volmaakte democratie zouden we willen toevoegen dat alle partijen of dingen waartussen gekozen moet worden, gelijk worden behandeld.

Soms zijn er gewoon maar twee mogelijkheden om uit te kiezen. In dat geval kan het probleem dat “de samenleving als geheel” mogelijkheid A boven B verkiest, mogelijkheid B boven C maar mogelijkheid C boven A niet optreden en kunnen we met een gerust hart ‘twee aan twee vergelijken’, bijvoorbeeld in een referendum. Ook hierbij kunnen vreemde verschijnselen optreden zoals uit de volgende twee voorbeelden blijkt.

Verkiezingen versus referenda

In de Gemeente Zwaanhoven zijn twee partijen: Zwaanhoven Belangen en Leefbaar Zwaanhoven. Bovendien draaien de verkiezingen geheel om drie thema's: de bouw van een parkeergarage in een park, een fusie met de nabijgelegen gemeente Oest en de privatisering van het Zwaanhovens Vervoerbedrijf. Op al deze drie punten zijn de partijen het met elkaar oneens. Als de een voor is, is de ander tegen en andersom.

De meningen van de kiezers zijn verdeeld. Ze zijn in te delen in 4 groepen. Hieronder staat aangegeven hoe deze groepen het per vraagstuk met de verschillende partijen eens zijn en hoe groot ze zijn. We gaan er vanuit dat alle kiezers de drie thema's even belangrijk vinden. De kiezers uit groep A zijn het op twee punten (de parkeergarage en de fusie met Oest) eens met Leefbaar Zwaanhoven en slechts op een punt met Zwaanhoven Belangen. Deze kiezers stemmen dus op Leefbaar Zwaanhoven. Op dezelfde manier kiezen de andere kiezers voor de partij met wie ze het op 2 van de 3 punten eens zijn.

Kiezers	**Parkeergarage**	**Fusie**	**Privatisering**	**Gekozen partij**
A:20%	Leefbaar Z	Leefbaar Z	Z Belangen	Leefbaar Z
B:20%	Leefbaar Z	Z Belangen	Leefbaar Z	Leefbaar Z
C: 20%	Z Belangen	Leefbaar Z	Leefbaar Z	Leefbaar Z
D: 20%	Z Belangen	Z Belangen	Z Belangen	Z Belangen
Winnaar igv Referendum:	**Z Belangen**	**Z Belangen**	**Z Belangen**	

Bij de verkiezingen wint Leefbaar Zwaanhoven met 60% van de stemmen tegen 40% voor Zwaanhoven Belangen kan dus in op alle drie de punten zijn zin doordrukken. Maar als er referenda gehouden zouden worden zou juist Zwaanhoven Belangen op alle drie de punten zijn zin krijgen (steeds met een meerderheid van 60% tegen 40%) en zou Leefbaar Zwaanhoven achter het net vissen.

O was ik maar bij moeder thuisgebleven

In de nabijgelegen gemeente Oest is de situatie een beetje anders dan in Zwaanhoven. Hier draait alles om de aanleg van een snelle metroverbinding tussen Oest-Oost en Oest-West. Het gemeentebestuur is voor, evenals 60% van de inwoners van Oest (om precies te zijn de inwoners Oest-West en Oest-Oost, ieder goed voor 30% van de bevolking). De inwoners van het oude centrum van Oest zijn tegen, omdat ze geen zin hebben in alle graafwerkzaamheden onder hun antieke dorpskern. Deze mensen vormen de overige 40% van de Oestse bevolking. (Oest-Noord bestaat geheel uit industrieterrein en Oest-Zuid bestaat om onduidelijke redenen niet.)

Het gemeentebestuur van Oest besluit een referendum over de kwestie uitteschrijven. 'Zo hebben de burgers niet het gevoel dat ze niks te zeggen hebben', redeneert het gemeentebestuur, 'en bovendien hebben we niets te verliezen met 60% voorstanders.' Als de opkomst bij het referendum 50% of meer is, is het referendum bindend en zal de gemeente zich houden aan de uitslag. Als de opkomst lager is dan 50% is het referendum ongeldig en mag het gemeentebestuur doen wat ze wil, in dit geval dus de metrolijn aanleggen.

Hier zien we een mooi voorbeeld van de '*Paradox van de thuisblijver*'. Door een lokale regenbui regent het in Oest-Oost en in het oostelijke deel van Oest-centrum. De 30% voorstemmers in Oest-Oost denken 'ja, zeg ik ga niet helemaal door de regen lopen voor een metrolijn die er pas in 2030 ligt' en blijven thuis. De 40% tegenstemmers in Oest-Centrum denken: 'Een verkoudheid duurt misschien een week, maar die graafwerkzaamheden zullen als we niet uitkijken 25 jaar in beslag nemen' en trotseren dus weer en wind om tegen te stemmen.

De vraag is nu wat de inwoners van het zonovergoten Oest-West moeten doen.

Als rechtgeaarde democraten snellen ze natuurlijk massaal naar de stembus om hun voorstem te laten klinken, maar eigenlijk is dat niet in hun belang. Als de 30% inwoners van Oest-West vóór stemmen is het referendum rechtsgeldig met een opkomst van 70%, maar de tegenstanders winnen met 4/7 oftewel 57% van de stemmen. Als de Oest-Westenaren daarentegen massaal waren thuisgebleven hadden ze hun zin gekregen: met een opkomst van slechts 40% hoeft het gemeentebestuur geen rekening met de uitslag van het referendum te houden, ook al is in dat geval 100% van de stemmen tegen. De voorstemmers moeten dus eigenlijk zorgen dat ze óf allemaal wel óf allemaal niet gaan stemmen Maar ja, zie maar eens met zoveel mensen tot een handige afspraak te komen....

Eisen aan je kiessysteem en de stelling van Arrow

Na deze voorbeelden van hoe een kiessysteem tot een vreemde of zelf 'oneerlijke' uitslag kan leiden, kunnen we bekijken welke eisen we aan ons kiessysteem zouden willen opleggen, om hem maar zo eerlijk mogelijk te maken. We zijn in de tekst tot nu toe 5 eisen tegengekomen waaraan een volmaakte democratie zou moeten voldoen:

Neutraliteit: alle partijen worden gelijk behandeld (Dit gebeurt niet in het voorbeeld van de stoelen, maar ook niet bij het referendum in Oest.)

Meerderheidsprincipe: als de meerderheid partij A boven partij B verkiest moet A ook boven B eindigen (Dit gebeurt niet in het voorbeeld van de kleuren.)

Monotonie: als iemand van gedachten verandert en partij A hoger waardeert dan eerst, dan moet A er ook in de uitslag op vooruit gaan. (Dit gebeurt niet bij het referendum in Oest: als een voorstander besluit tóch maar te gaan stemmen, kan hij daarmee juist net voorkomen dat de metro er komt.)

Onafhankelijkheid van Irrelevante Alternatieven: toevoegen en weer verwijderen van partijen heeft geen invloed (Dit ging mis in het voorbeeld van de schoolklas)

Transitiviteit: als A eindigt boven B en B boven C dan eindigt A automatisch ook boven C. (Dit is niet haalbaar bij twee aan twee vergelijken zoals blijkt uit het voorbeeld van de stoelen.
De uitdaging is nu: kunnen we een kiessysteem bedenken dat aan alle vijf deze eisen voldoet.

Het antwoord is nee. Dit neemt echter niet weg dat je het niet kunt proberen. Er zijn een hoop verschillende kiessystemen mogelijk die elk hun eigen paradoxen hebben. Je zult moeten kiezen welke eisen je belangrijker vindt dan andere. Je zou bijvoorbeeld kunnen zeggen dat het meerderheidsprincipe en monotonie gewoon te veel gevraagd zijn. Laten we monotonie gewoon afschaffen als eis en het meerderheidsprincipe vervangen door (onbetwistbaar redelijke) '**Pareto eis**':

Als IEDEREEN partij A boven B verkiest moet A ook boven B eindigen in de verkiezingen.

Is er een systeem dat aan deze eis voldoet, transitief is, onafhankelijk van irrelevante alternatieven en alle partijen gelijk behandelt? Het antwoord is ja, en dit systeem heet dictatuur. Met dictatuur wordt in dit geval bedoelt dat alle kiezers een mening hebben over hoe de uitslag eruit zou moeten zien, maar deze uitslag per definitie altijd gelijk is aan de mening van één van hen, de dictator. Het is duidelijk dat dit systeem aan alle vier deze eisen voldoet.

Dit wil niet zeggen dat dictatuur wiskundig gezien het meest democratische systeem is. We kunnen namelijk gewoon een eis aan onze volmaakte democratie toevoegen, bijvoorbeeld dat alle stemmen even zwaar moeten meetellen. Ga na dat een district-ensysteem zoals in Engeland ook niet aan deze eis voldoet.

Wat nu in 1950 door Keneth Arrow bewezen is, is het volgende: er is geen systeem dat

- niet dictatoriaal is (niet iedereen hoeft gelijk behandeld te worden, maar je moet het niet te bont maken),
- neutraal is(alle partijen worden gelijk behandeld),
- aan de Pareto eis voldoet (als iedereen A beter vindt dan B moet A ook beter uit de bus komen dan B)
- transitief is (Er is wel een uitslag).

Dit klinkt nogal schokkend. De (nog niet eens zo heel) Volmaakte Democratie is wiskundig bewezen (niet te verwarren met statistisch bewezen) onhaalbaar.

Voor wie meer wil lezen:

Meer leuke voorbeelden van verkiezingsparadoxen (en een hoop andere leuke wiskunde) is te lezen in: *De wraak van Archimedes* (*Archimedes' revenge*) van Paul Hoffman.

Nog veel en veel meer informatie over verkiezingsparadoxen met wiskundige achtergronden en voorbeelden uit de 'echte' politiek is te vinden in *Verkiezingen, een web van paradoxen* door H. de Swart, A van Deemen, E van der Hout en P. Klop, deel 8 uit de Zebrareeks van Epsilon Uitgaven.

Verkiezingsparadoxen bij echte Nederlandse verkiezingen zijn te vinden in het artikel *Emperical evidence of paradoxes of voting in Dutch elections*, door A. van Deemen en N. Vergunst, in *Public Choice*, 97, blz 475-490, 1998

Keneth Arrow beschreef zijn stelling in zijn boek: *Social Choice and Individual Values* uit 1951

Links:

Beschrijving van (oneerlijkheden in) de stemmethode waarmee beslissingen in de Europese Unie worden genomen (als de grondwet er komt): *De stemverhoudingen in de Europese ministerraad*

Door Tom Koornwinder, te downloaden op
http://staff.science.uva.nl/~thk/art/popular.html

Uitgebreide Engelstalige website over kiessystemen en verkiezingsparadoxen:
http://www.electionmethods.org

Three brief proofs of Arrow's theorem, door John Geanakoplos, te downloaden op http://ideas.repec.org/p/cwl/cwldpp/1123r3.html

Uitslag Britse verkiezingen 2005:
http://news.bbc.co.uk/1/hi/uk_politics/vote_2005/constituencies/default.stm

Uitslag Amerikaanse presidentsverkiezingen 2000:
http://www.cnn.com/ELECTION/2000/results/index.president.html

Het Ierse systeem om de president te kiezen is interessant. De kandidaten mogen een lijstje opgeven met hun eerste, tweede, derde keus etc. Het idee is dat als duidelijk wordt dat de eerste keus van een bepaalde kiezer geen kans maakt, zijn stem niet wordt 'weggegooid' zoals bij de meeste kiessystemen, maar wordt overgedragen op zijn tweede keus.
Preciezere uitleg hierover op de Ierse verkiezingssite:
http://www.environ.ie/DOEI/DOEIPol.nsf/wvNavView/wwdElections?OpenDocument&Lang=en

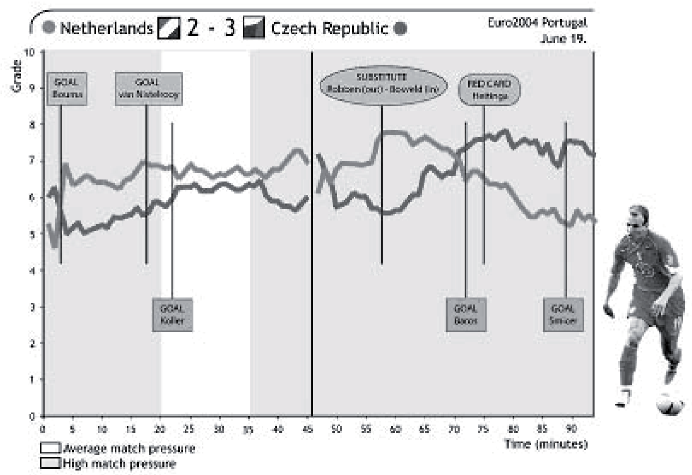
Uitleg over hoe in dit systeem (een variant op) de paradox van de thuisblijver optreedt is te vinden in het boek van Paul Hoffman (zie boven).

Districtenstelsels:
Groot Brittanië is verdeeld in 646 kiesdistricten. Het aantal inwoners per district wisselt. Voor ieder kiesdistrict is er 1 zetel in het lagerhuis. Deze gaat naar de persoon die in zijn district de meeste stemmen heeft gekregen. Iedere kandidaat is maar in 1 district verkiesbaar, maar de meeste kandidaten zijn wel aangesloten bij een landelijke partij. Verkiezingsparadoxen kunnen optreden omdat de stemmen van mensen die op een kandidaat stemmen die uiteindelijk niet wint in zijn district worden 'weggegooid', deze kiezers zijn niet vertegenwoordigd in het lagerhuis. Een voorbeeld. Stel GB heeft 200 inwoners verdeeld over 10 districten: district I t/m IX hebben 11 inwoners en district X heeft er 101. Er zijn twee partijen A en B die in elk van de districten een kandidaat leveren. Als partij A 6 stemmen haalt in elk van de districten I t/m IX en 4 in district X, terwijl partij B 5 stemmen haalt in de eerste 9 districten en 97 in district X, dan heeft partij A 90% van de zetels met 25% van de stemmen en partij B 10% van de zetels met 75% van de stemmen. In werkelijkheid zijn percentages vaak wat minder schokkend omdat de verschillen in aantallen inwoners tussen de districten kleiner zijn. Maar toch: een absolute meerderheid op basis van slechts 35% van de stemmen is niet gek.

Wiskunde en Sport

Prof.dr. G. Sierksma
Rijksuniversiteit Groningen, Faculteit Economie en Bedrijfskunde
e-mail: G.Sierksma@rug.nl

Er is een wereld van verschil tussen sport en wiskunde, maar beide hebben in toenemende mate met elkaar te maken gekregen. Beslissingen over een efficiënt gebruik van haar belangrijkste kapitaal, de atleten, worden steeds minder genomen op basis van intuïtie en gezond verstand alleen, maar meer en meer door ook gebruik te maken van geavanceerde computersystemen. De Rijksuniversiteit Groningen ontwikkelt in samenwerking met het bedrijf ORTEC/TeamSupport-Systems systemen die trainers, coaches en atleten ondersteunen. Centraal in deze systemen staat de vraag hoe de atleet zich ontwikkelt en hoe hij/zij presteert in vergelijking tot zijn collega's. Voor de voetballerij zijn twee systemen ontwikkeld en op de markt gebracht, namelijk Coach & Scout Assistant (C&SA) en Effectivity in Action (EiA). C&SA is een systeem waarmee de toegevoerde waarde van gescoute spelers wordt berekend en hun optimale veldpositie. EiA meet prestaties van spelers gedurende de wedstrijd en berekent grafieken van de koers van de effectiviteit van beide teams. De gebruikte algoritmen zijn gebaseerd op methoden uit de operations research en de optimaliseringswiskunde. De systemen zijn, naast voetbal, ook geschikt gemaakt voor andere teamsporten, zoals volleybal en basketbal.



De dramatische Robben-wissel in 2004

Computers en sport: een gouden toekomst

TSS
Team Support Systems

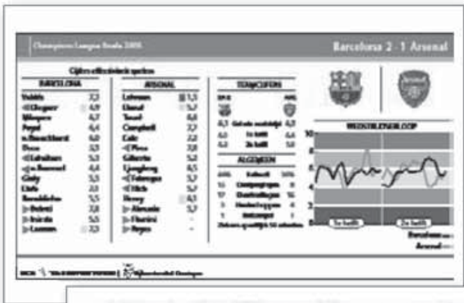
Team Support Systems (TSS), member of the ORTEC Group, is een bekende speler binnen de voetbal- en volleybalwereld. TSS ontwikkelt analyse- en beslissingsondersteunende systemen voor sportorganisaties die te maken hebben met sportteams. Deze systemen meten prestaties van spelers en teams, waarmee clubs en sportbonden talenten en topatleten kunnen volgen. De pers kan worden voorzien van neutrale informatie, waarnaast onbegrensde mogelijkheden voor sponsoren worden gecreëerd om de sportliefhebbers te boeien en te veroveren. Dit alles ondersteunt de ontwikkeling en professionalisering van sport op weg naar een gouden toekomst.

Totaalconcept

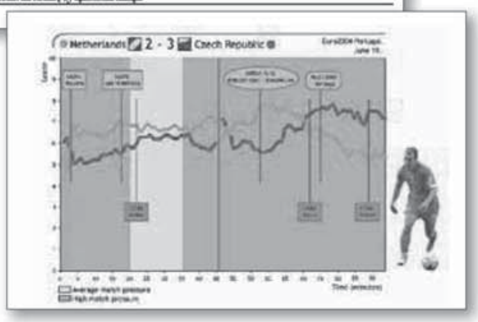
Naast de analysetools voor voetbal en volleybal biedt TSS ook een totaalsysteem voor sportclubs, nationale en internationale sportbonden. Dit totaalsysteem bestaat uit het vergaren van (statistische) informatie, waarmee via diverse uitvoermogelijkheden alle doelgroepen rondom de sport kunnen worden geïnformeerd. Het technische management beschikt over diepgaande analyses, de diverse media over objectieve cijfers en het publiek ter plaatse en op afstand kan de sport nog intenser beleven via analyses op internet, televisie en grote videoschermen. Zo draagt het totaalconcept bij aan het professionaliseren en innoveren van sport op weg naar een gouden toekomst.

Analyses

Binnen het volleybal spelen analyses al zo'n 15 jaar een belangrijke rol. Samen met de Italiaanse partner Data Project, levert TSS aan alle 16 A-league-teams software, hardware en kennisoverdracht om elke technische staf van diepgaande wedstrijdanalyses te voorzien. Ook ondersteunt TSS de Nationale volleybalteams, zowel bij de dames als de heren.



De voetbalsystemen zijn gebaseerd op de expertise van de onderzoeksgroep Kwantitatieve Logistiek en Bewegingswetenschappen van de Rijksuniversiteit Groningen. Met deze systemen worden de spelers en het team beoordeeld op meetbare kwaliteiten in de training en wedstrijd. Zo wordt tijdens de wedstrijd een realtime (video)analyse gemaakt van de effectiviteit van de spelers, de acties en het team, waarmee coaches al tijdens de wedstrijd ondersteund kunnen worden. In de Nederlandse voetbalclub Vitesse heeft TSS de ideale sparringpartner gevonden om dit verder te perfectioneren.



Voor meer informatie kunt u kijken op www.teamsupportsystems.com

OOST, WEST, THUIS BEST?

Ruud H. Koning

Thuisvoordeel is een zeer bekend fenomeen in de sport. Sporters die thuis spelen halen in het algemeen meer succes, en dat heeft er toe geleid dat oud-minister Winsemius er zelfs een boekje voor managers over heeft geschreven: 'Speel nooit een uitwedstrijd'. Dit roept wel de vraag op hoe groot thuisvoordeel nu eigenlijk is. Als je verder thuisvoordeel echt wilt gebruiken, is het ook nuttig te weten wat nu de oorzaken zijn van dat voordeel. In deze bijdrage gaan we nader in op meting van het thuisvoordeel. Het leidende voorbeeld is meting van thuisvoordeel in de Nederlandse eredivisie in het seizoen 2006/2007, maar dat voorbeeld kan ook voor andere sporten (en natuurlijk andere seizoenen) worden gebruikt.

Thuisvoordeel wordt in het algemeen toegerekend aan vier verschillende factoren: steun van het (thuis)publiek; bekendheid met de locale omstandigheden; reistijd; spelregels.

De eerste factor behoeft weinig toelichting. Een voorbeeld van de tweede factor is de bekendheid van een sporter met de belijning in zijn eigen sporthal, terwijl die in een andere sporthal anders kan zijn. Reizen kan vermoeiend zijn, dus het bezoekende team of de bezoekende sporter heeft op dit gebied een nadeel. In sommige sporten bieden de spelregels bepaalde voordelen aan het team dat thuis speelt, zo moeten uitspelende honkbal teams in de Verenigde Staten aan slag beginnen, zodat het thuisteam steeds weet hoeveel punten het moet maken om de wedstrijd te winnen.

Een recent overzicht van thuisvoordeel in verschillende sporten wordt gegeven in Stefani (2007). Hij analyseert alleen teamsporten, en definieert thuisvoordeel als de mate waarin een team thuis vaker wint dan in uitwedstrijden. De sport met het grootste thuisvoordeel is rugby (25.1%), gevolgd door voetbal (21.7%), NBA basketbal (21.0%), American Football (17.5%), NHL ijshockey (9.7%), en MLB honkbal (7.5%). De verschillen tussen de sporten zijn groot te noemen, waarbij het opvalt dat de sporten met het grootste thuisvoordeel continu zijn: spelers beginnen en zijn in het algemeen pas uitgespeeld bij het eindsignaal. Vermoeidheid ten gevolge van reizen kan een verklaring zijn voor dat grote thuisvoordeel.

Deze aanpak om thuisvoordeel te meten heeft één groot voordeel – eenvoud – en twee nadelen: de maatstaf zegt niets over mogelijke variatie van thuisvoordeel tussen verschillende teams, en de maatstaf is ook niet goed toepasbaar in individuele sporten.

Voetbal

Thuisvoordeel in voetbal is van alle tijden, en van alle landen. Ruwweg de helft van alle wedstrijden wordt gewonnen door het thuisspelende team, een kwart eindigt in een gelijkspel, en een kwart wordt gewonnen door het team dat uit speelt. Echter, dit zijn gegevens op geaggregeerd niveau, voor een hele competitie over langere tijd. Voetballiefhebbers weten echter dat het soms spookt in de Euroborg, terwijl elders wordt geschamperd over 'Ajax publiek'. Thuisvoordeel zal niet hetzelfde zijn voor elke club, dus een iets fijnzinniger maat is nodig.

Een praktische procedure om thuisvoordeel te meten voor individuele teamsporten in een volledige competitie is voorgesteld door Clark en Norman (1995). Zij gaan er van uit dat het verwachte resultaat in een wedstrijd is toe te dichten aan twee factoren: thuisvoordeel en kwaliteitsverschil. Beide factoren worden voor elk team geschat. Nu zit er wel een addertje onder het gras als je thuisvoordeel voor indivuele teams gaat meten. Stel dat de competitie uit drie teams zou bestaan, *A*, *B*, en *C*. Team *A* is het sterkste team, en wint zowel thuis als uit van *B* met 2-1, en van *C* met 3-1. Team *B* wint thuis en uit van *C* met 2-1. Er is geen thuisvoordeel, en alle teams scoren thuis even veel als uit, en krijgen thuis even veel goals tegen als uit. De doelsaldo's van de drie teams staan vermeld in de eerste twee kolommen van tabel 1. Er is geen thuisvoordeel, het doelsaldo van alle teams in thuis- en uitwedstrijden is even goed. Nu krijgt team *C* een thuisvoordeel van twee doelpunten, dus het speelt thuis gelijk tegen team *A*, en wint met 3-2 van team *B*. Het doelsaldo van team *A* in thuiswedstrijden is nu +3, en in uitwedstrijden is het +1, zoals ook in de laatste twee kolommen van tabel 1 staat. Echter, het lijkt nu alsof team *A* *ook* een thuisvoordeel heeft, terwijl dit niet het geval is. Het verschil in doelsaldo tussen thuis- en uitwedstrijden is geen goede maatstaf voor *individueel* thuisvoordeel, aangezien het ook het gemiddelde thuisvoordeel in de gehele competitie bevat.

Clarke en Norman stellen dus een andere maatstaf van thuisvoordeel voor. Allereerst modelleren zij het doelpuntenverschil in een wedstrijd tussen teams *i* (thuis) en *j* (uit) als volgt:

$$w_{ij} = u_i - u_j + h_i + \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

In deze vergelijking is w_{ij} het doelpuntenverschil in een wedstrijd. Dit is positief als het thuisteam wint, nul als de wedstrijd in een gelijkspel eindigt, en negatief als het uitteam wint. Dit verschil hangt af van drie factoren: het verschil in kwaliteit tussen beide teams (u_i-u_j), het thuisvoordeel van team *i* (h_i), en toevalsfactoren (het weer, een gemiste strafschop) die worden gemodelleerd met een storingsterm (ε_{ij}), die verwachting 0 heeft en gelijke variantie voor elke waarneming. De verwachting van het resultaat is dus $Ew_{ij} = u_i - u_j + h_i$, ofwel, het verwachte resultaat hangt af van het kwaliteitsverschil (u_i- u_j) en het thuisvoordeel van het thuisspelende team h_i. Het resultaat van een individuele wedstrijd wordt uiteraard ook nog bepaald door het toeval, ε_{ij}, maar uiteindelijk zijn we meer geïnteresseerd in de parameters u en h, die kwaliteit en thuisvoordeel gedurende een heel seizoen weergeven, dan in toeval dat soms een

	GEEN THUISVOORDEEL		THUISVOORDEEL C	
	HGD	AGD	HGD	AGD
TEAM A	3	3	3	1
TEAM B	0	0	0	-2
TEAM C	-3	-3	1	-3

Tabel 1. Doelsaldo in thuis- en uitwedstrijden (zonder en met thuisvoordeel voor team C, HGD = doelsaldo thuiswedstrijden, AGD = doelsaldo uitwedstrijden).

belangrijke rol speelt bij de bepaling van de uitslag van een individuele wedstrijd. In zekere zin is het ontwikkelen en gebruiken van thuisvoordeel ook een kwaliteit, maar dat bedoelen we niet met de parameter u_i. u_i meet de kwaliteit van een team, als op een neutraal terrein zou worden gespeeld. Het gemiddelde van alle u's is 0, zodat een team met een positieve u beter is dan het gemiddelde team, en een team met een negatieve u slechter. Thuisvoordeel heeft nu ook een natuurlijke interpretatie: het is het verwachte doelpuntenverschil als beide teams even goed zijn (dus als u_i-u_j=0). De restrictie dat de som van alle kwaliteitsparameters 0 is, is noodzakelijk, anders is kan het model niet worden geschat. Als in vergelijking (1) alle u's met een constante worden verhoogd, verandert het verschil niet, en dus wordt de kansverdeling van de geobserveerde grootheid (het doelpuntenverschil) dan niet uniek bepaald door de parameters. De identificerende restrictie $\sum_i u_i=0$ lost dit probleem op. Een andere identificerende restrictie zou kunnen zijn u_1 =0, dus de de kwaliteit van het eerste team is 0, en de kwaliteitsparameters van alle andere teams worden dus gemeten ten opzichte van team 1. Echter, het is informatiever om te weten dat een bepaald team een positieve u heeft, en dus beter dan gemiddeld is, dan dat dit team beter is dan team 1.

De parameters u_i en h_i kunnen geschat worden met de methode der kleinste kwadraten, maar het kan ook op een equivalente, andere manier. We gebruiken tabel 2, waarin de gegevens van de Nederlandse eredivisie van het seizoen 2006/2007 staan vermeld. Er namen 18 teams deel aan deze competitie, dus elk team speelt 17 thuiswedstrijden. In die tabel staan gegevens over thuiswed-

team	HW	HD	HL	H.f	H.a	HGD	AW	AD	AL	A.f	A.a	AGD	GD	p	h	u
1 Ajax	12	3	2	44	12	32	11	3	3	40	23	17	49	75	0.257	1.535
2 AZ	10	6	1	44	13	31	11	3	3	39	18	21	52	72	−0.055	1.774
3 ADO Den Haag	2	4	11	19	36	−17	1	4	12	21	36	−15	−32	17	−0.805	−0.184
4 Excelsior	6	3	8	27	28	−1	2	3	12	16	37	−21	−22	30	0.570	−0.594
5 Feyenoord	10	5	2	29	24	5	5	3	9	27	42	−15	−10	53	0.570	−0.260
6 FC Groningen	8	4	5	32	26	6	7	2	8	22	28	−6	0	51	0.070	0.267
7 sc Heerenveen	10	4	3	35	14	21	6	3	8	25	29	−4	17	55	0.882	0.333
8 Heracles Almelo	7	6	4	27	19	8	0	5	12	5	45	−40	−32	32	2.320	−1.747
9 NAC Breda	6	7	4	22	21	1	6	0	11	21	33	−12	−11	43	0.132	−0.069
10 N.E.C.	8	3	6	22	20	2	4	5	8	14	24	−10	−8	44	0.070	0.045
11 PSV	15	0	2	53	14	39	8	6	3	22	11	11	50	75	1.070	1.156
12 Roda JC	11	2	4	29	14	15	4	7	6	18	22	−4	11	54	0.507	0.354
13 Sparta Rotterdam	6	5	6	20	24	−4	4	2	11	20	42	−22	−26	37	0.445	−0.642
14 FC Twente	13	3	1	47	15	32	6	6	5	20	22	−2	30	66	1.445	0.413
15 FC Utrecht	11	4	2	30	11	19	2	5	10	11	33	−22	−3	48	1.882	−0.722
16 Vitesse	7	4	6	30	23	7	3	4	10	20	32	−12	−5	38	0.507	−0.090
17 RKC Waalwijk	5	5	7	19	24	−5	1	4	12	14	36	−22	−27	27	0.382	−0.639
18 Willem II	7	2	8	21	27	−6	1	5	11	10	37	−27	−33	31	0.632	−0.931

Tabel 2. Berekening individueel thuisvoordeel.

strijden (in de kolommen met een *H*), en gegevens over uitwedstrijden (kolommen met een *A*). De eerste kolom is het aantal gewonnen thuiswedstrijden (*HW*), die wordt gevolgd door het aantal gelijk geëindigde thuiswedsrijden (*HD*) en het aantal verloren thuiswedstrijden (*HL*). Vervolgens wordt voor de thuiswedstrijden het aantal doelpunten voor (*H.f*), tegen (*H.a*) en het doelsaldo in thuiswedstrijden (*HGD*) gegeven. De laatste twee kolommen geven de schattingen voor thuisvoordeel h en kwaliteit u. Die zijn als volgt berekend:

1. H is het gemiddelde thuisvoordeel voor de gehele competitie, $H = \sum_i HGD_i/17$. In dit geval vinden we $H = 11$.
2. Het thuisvoordeel voor elk team is $h_i = (HGD_i\text{-}AGD_i\text{-}H)/16$, dus het verschil van het doelsaldo in thuis- en uitwedstrijden, verminderd met het gemiddelde thuisvoordeel, gedeeld door 16. Er moet door 16 worden gedeeld, omdat de waarnemingen $HGD_i\text{-}AGD_i\text{-}H$ aan twee restricties voldoen: $H = \sum_i HGD_i/17$ en $\sum_i HGD_i + \sum_i AGD_i = 0$.
3. Kwaliteit tenslotte is dat deel van het doelsaldo in thuiswedstrijden dat niet te danken is aan thuisvoordeel: $u_i = (HGD_i\text{-}(18\text{-}1) \times h_i)/18$.

De resultaten van deze rekenpartij staan in de laatste twee kolommen van tabel 2. Het team met de hoogste kwaliteit was AZ Alkmaar, maar hun thuisvoordeel was laag. Als elke competitiewedstrijd op neutraal terrein zou zijn gespeeld, was AZ misschien *wel* kampioen geworden. Aan de andere kant zien we ook dat de kwaliteit van PSV lager is dan die van Ajax, maar dat het thuisvoordeel in Eindhoven de doorslag heeft gegeven. Uit de tabel is in elk geval duidelijk dat het ene team een veel groter thuisvoordeel heeft dan het andere team. Het model is in staat om ruim 40% van de variatie in wedstrijdresultaten te verklaren. De geschatte residuen $\hat{\varepsilon}_{ij}$ volgen inderdaad bij benadering een normale verdeling.

De Clarke-Norman methode voor het schatten van thuisvoordeel is bruikbaar voor alle sporten die in een volledige competitie worden gespeeld, zoals voetbal, hockey, waterpolo en basketbal. Een nadeel van deze methode is dat die niet bruikbaar is om thuisvoordeel in individuele sporten te schatten.

Conclusie

Thuisvoordeel is belangrijk in sport. Goede meting van thuisvoordeel is echter moeilijk, omdat sportwedstrijden niet als experiment worden uitgevoerd. De vorm van de competitie (volledige competitie met uit- en thuiswedstrijden, of een toernooi vorm waarbij niet elke speler tegen elkaar speelt) bepaalt in grote mate in hoeverre thuisvoordeel meetbaar is, en welke maatstaf handig is. In het voorbeeld is gebleken dat thuisvoordeel niet gelijk is voor elk team in de Nederlandse eredivisie in het seizoen 2006-2007. De methode die is besproken om thuisvoordeel te schatten is goed toepasbaar in sporten, waarin een volledige competitie met uit- en thuiswedstrijden wordt gespeeld. Thuisvoordeel in individuele sporten, die vaak in toernooivorm worden gespeeld, is moeilijker (zie bijvoorbeeld voor meting van thuisvoordeel in tennis Koning (2008). Toch is ook voor verschillende individuele sporten het belang van thuisvoordeel aangetoond.

LITERATUUR

Clarke, S.R. and J.M. Norman (1995). Home ground advantage of individual clubs in English soccer. *The Statistician* 44(4), 509-521.

Koning, R.H. (2008). Home advantage in professional tennis. Manuscript.

Stefani, R. (2007). Measurement and interpretation of home advantage. In: J. Albert and R.H. Koning (eds), *Statistical Thinking in Sports,* Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, pp. 203-216.

RUUD H. KONING is als hoogleraar sporteconomie verbonden aan de Faculteit Economie en Bedrijfskunde van de Rijksuniversiteit Groningen. E-mail: r.h.koning@rug.nl

Svn Kramer

Sven Kramer passeert Eric Heiden

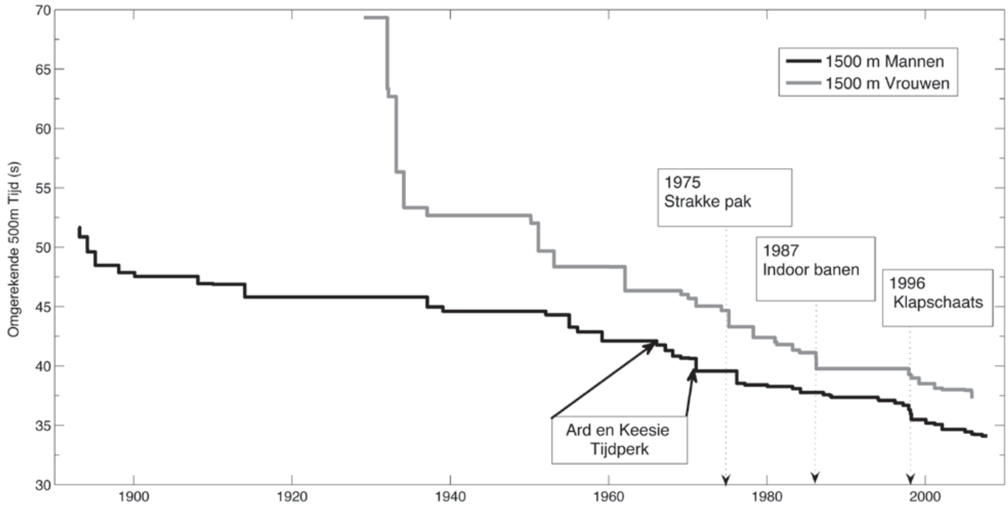
De beste schaatser en schaatsster aller tijden

Wie zijn de beste schaatsers en schaatssters ooit? Ard Schenk of Sven Kramer, Yvonne van Gennip of Ireen Wüst? Uit de meer dan 3000 schaatsers en schaatssters, die sinds 1893 om de prijzen en de eer strijden en uit meer dan 90.000 schaatstijden is het 'Universeel Schaatsklassement' berekend voor zowel allrounders als sprinters. Inderdaad is Sven Kramer hard op weg de beste allrounder aller tijden te worden, maar dan zal hij in Vancouver zeker de beide gouden plakken moeten verzilveren.

Gerard Sierksma en Bertus Talsma

De tijden veranderen

Het is 23 februari 1980. Eric Heiden staat op het punt een nooit eerder vertoond Grand Slam te behalen. In een grauwe sneeuwjacht op het openlucht-schuurpapier-ijs van Lake Placid (zee-niveau!) verpulvert Heiden in een tijd van 14 minuten en 28,13 seconden het oude record van



Figuur 1. Ontwikkeling wereldrecord 1500m, mannen en vrouwen

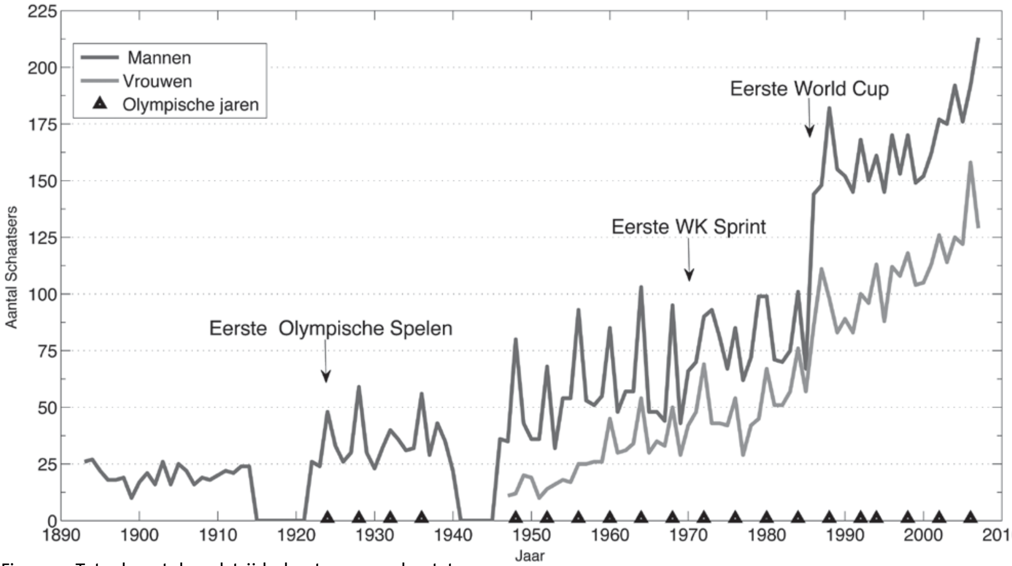
Viktor Ljoskin met maar liefst 6,20 seconden, terwijl Lotskin reed op het olie-ijs van de Medeobaan op 1691 meter boven zeeniveau. Amper twee maanden later rijdt Dmitri Ogloblin op Medeo naar een nieuw wereldrecord in 14.26,71. Maar wie van de twee levert nu eigenlijk de grootste prestatie? Heiden schaatst zijn gouden tijd in een sneeuwstorm, terwijl Ogloblin de wonderbaan van Medeo gebruikt. Niemand kent inmiddels meer Oglobin en de wonderbaan van Medeo is intussen gesloten.

Calgary, 28 februari 1988. De eerste indoor(!) Olympische schaatswedstrijden houden Nederland uit de slaap. Waar niemand op heeft durven hopen is eerder die week toch gebeurd: Yvonne van Gennip heeft de Oostduitse 'meiden' twee keer geklopt. Op de 5000 meter haalt Van Gennip haar derde gouden plak in een direct duel met de dan nog onbekende Gunda Niemann, die na een val huilend over de finish komt. Is Yvonne van Gennip de beste schaatsster aller tijden? In Calgary zal niemand daaraan getwijfeld hebben, maar drie weken later op het oeroude zonovergoten natuurijsbaantje in het Noorse Skien herstelt Karin Kania de aloude Oostduitse hegemonie en wordt zij wereldkampioen. Fenomenen als Jaap Eden, Oscar Mathisen, Ard Schenk en Eric Heiden kunnen de cijfers een paar jaar in hun greep houden, maar altijd komt het moment dat het doek valt. Niet omdat ze verslagen worden, want dan zijn de helden van aleer allang gestopt.

In het blad *SchaatsSport* (2004) van de KNSB stelt Ottavio Cinquanta, de president van de International Speed Skating Union, de vraag of er een correcte methode is om de toppers van nu en vroeger te vergelijken en te rangschikken.

Van strak pak tot klapschaats

Talloze ontwikkelingen en innovaties hebben ervoor gezorgd dat het alsmaar harder gaat. Wie herinnert zich nog de Zwitserse schaatsveteraan Franz Krienbühl, die bij het Europees kampi-



Figuur 2. Totaal aantal wedstrijdschaatsers en schaatsters

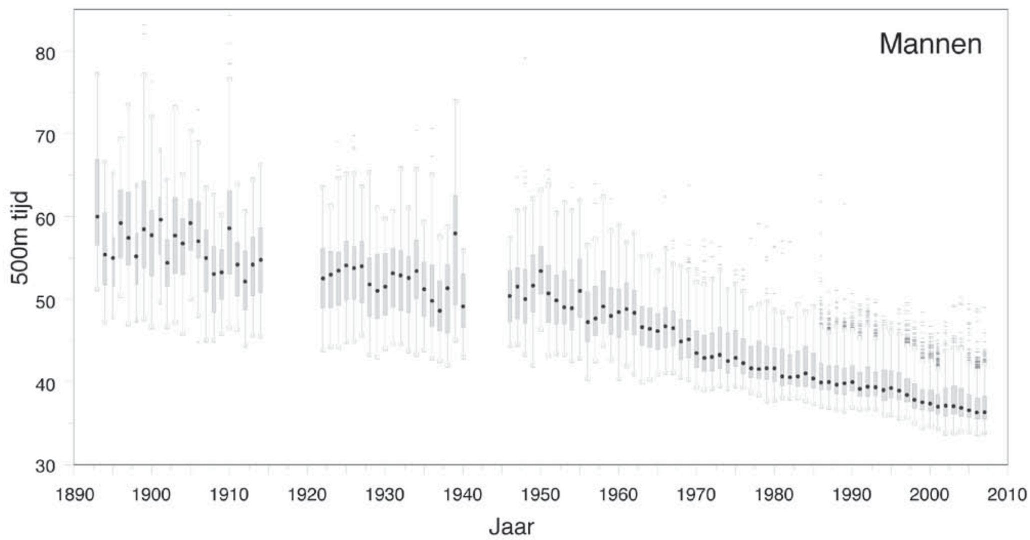
oenschap in 1974 aan de start verschijnt in een naadloos sluitend 'skinpak'? De introductie van kunstijsbanen (1958: Gothenburg), indoorbanen (1987: Thialf) en klapschaatsen (1995: Tonny de Jong) zorgen voor vergelijkbare sprongen voorwaarts.

De gevolgen van al die ontwikkelingen laten zich raden. Het gaat steeds sneller, soms met sprongen tegelijk. In Figuur 1 is de ontwikkeling te zien van de 1500m-wereldrecords en de beste seizoentijden op de grote toernooien vanaf 1893. Hoewel de vrouwen zich met name in de beginperiode (de jaren dertig) als het ware 'op de mannen stortten', lijkt zich nu een constante afstand tussen de beide sexen af te tekenen. Met al die nieuwigheden lijken de prestaties van Jaap Eden, Kees Broekman, Henk van der Grift, Stien Kaiser en Carry Geijsen onvergelijkbaar geworden met die van Marianne Timmer, Gerard van Velde en de andere toppers van de moderne tijd. Tenzij op een andere manier naar de schaatstijden wordt gekeken.

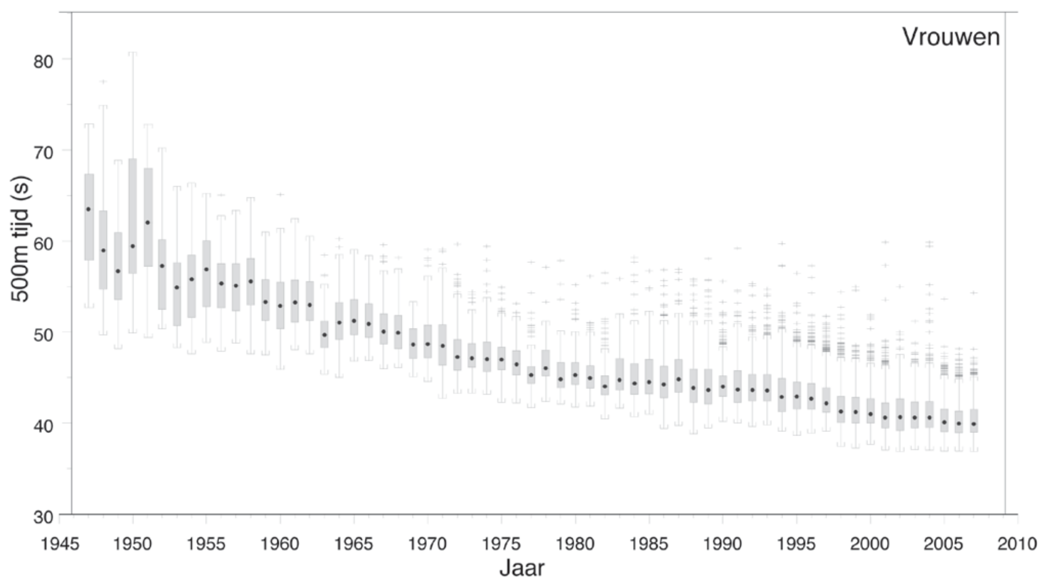
Van absolute tijden naar tijdsverschillen

Sinds 1893 hebben zo'n 2200 mannen en vanaf 1947 zo'n 1100 vrouwen gestreden om de titels en de eer. In Figuur 2 hebben we het verloop van deze aantallen weergegeven. Opvallend is de enorme toename bij zowel de mannen als de vrouwen, waarbij de invoering van de World Cup tot een extra toename bij de mannen heeft geleid. De pieken in beide grafieken worden veroorzaakt door de Olympische Spelen, omdat dan ook de kleine schaatslanden sporters afvaardigen.

Het aantal toernooien voor mannen en vrouwen tezamen ligt op ongeveer 800. Het totale aantal wedstrijden ligt een flink stuk boven de 3000. Dat maakt dat de dataset van Jeroen Heijmans (zie www.skateresults.com) maar liefst zo'n 90000 schaatstijden bevat. In Figuur 3 hebben we alle(!) schaatstijden uit de database van Heijmans in Box Plots weergeven. Langs de horizontale as staan de jaartallen; bijvoorbeeld 2006 betekent het seizoen 2005/2006. Langs de verticale as staan de, naar 500 meter omgerekende,



Figuur 3(a). Alle schaatstijden omgerekend naar 500 meter-tijden; mannen



Figuur 3(b). Alle schaatstijden omgerekend naar 500 meter-tijden; vrouwen schaatstijden. Duidelijk is te zien dat de gemiddelde seizoentijden een dalend karakter vertonen en dat de boxen steeds kleiner worden. Met andere woorden de schaatstijden, vooral de hele snelle, komen steeds dichter bij elkaar te liggen.

Voor een eerlijke vergelijking moeten alle schaatstijden worden gecorrigeerd en wel zó dat de voor- en nadelen van de omstandigheden worden geneutraliseerd. Omdat absolute tijden ongeschikt zijn, lijkt het slimmer naar *onderlinge tijdsverschillen* te kijken. Tijdsverschillen in de uitslag van een wedstrijd weerspiegelen immers de onderlinge krachtsverschillen. Regelmatig winnen met grote voorsprong, zoals Gianni Romme deed in de periode 1998-2001, tekent het grote talent en de suprematie van de allergrootsten.

In eerste instantie was het de bedoeling om de verschillen met de nummer één te nemen. Het nadeel hiervan is dat dan alle nummers één gelijkwaardig worden. Immers vanaf de nummer twee krijgt elke schaatser een verschiltijd toegewezen. Het feit dat Romme en Kramer hun 10 kilometers met veel grotere voorsprong wonnen dan bijvoorbeeld Bob de Jong (Olympisch goud in Turijn 2006!) wordt dan niet verdisconteerd. Daarom is gekozen om per gereden afstand de verschillen te nemen met de gemiddelde tijd van de 'eerste vijf'. Het feit dat voor die 'vijf' is gekozen is in zekere zin willekeurig. Een voordeel van deze keuze is dat de nummers één en twee per toernooi zich nu ook kunnen onderscheiden, waarmee recht wordt gedaan aan de suprematie van mensen als Romme en Kramer op de lange afstanden. De aldus gecorrigeerde onderlinge tijdsverschillen worden nog gewogen naar de belangrijkheid van de toernooien. Zo zijn de Olympische Spelen als viermaal zo belangrijk genomen als de wereldkampioenschappen. De andere toernooien zijn mutatis mutandis gewaardeerd op basis van hun specifieke status. Rest nog een laatste probleem. Zouden we het gemiddelde nemen over alle schaatsjaren van een schaatser, dan wordt bijvoorbeeld Rintje Ritsma 'gestraft' voor het zeer lang rekken van z'n carrière. Vandaar dat gekozen is de schaatsers te rangschikken op basis van hun vier allerbeste jaren. Eis is wel dat tenminste één van die vier jaren een Olympisch jaar is, ook al is dat geen topjaar voor de betreffende schaatser. In het geval een schaatser nooit aan de Spelen heeft meegedaan wordt een 'straftijd' toegekend, die lager is naarmate men actiever is geweest op andere toernooien. Schaatsers met minder dan vier actieve jaren worden niet meegenomen in de rangschikking.

Heiden en Niemann: kanjers onder kanjers

In Tabel 3 staat de top 15 van beide allroundklassementen en in Tabel 4 de top 15 sprinters. In deze tabellen betekent een score de gemiddelde voorsprong (-) of achterstand (+) op de gemiddelde tijd gereden tijdens zijn/haar vier beste jaren, omgerend naar 500 meter-tijden. In Tabel 4 bijvoorbeeld, betekent de score -0,255 van Heiden en de +0,063 van Jan Bos dat het verwachte verschil tussen Bos en Heiden tijdens een sprinttoernooi (vier afstanden!) maar liefst 1,272 punten zou zijn in het voordeel van Heiden.

Op 13 januari 2008 wordt Sven Kramer in Kolomna 'met twee vingers in de neus' Europees kampioen. Op de 10 kilometer speelt hij een katen-muis spelletje met zijn directe tegenstander de Noor Håvard Bøkko. Pas in de laatste drie ronden rijdt Kramer bij hem weg en wint met 'slechts' drie seconden voorsprong. Computerberekeningen laten zien dat in 2010 het mannen-allroundschaatsen wel eens een nieuwe leider zou kunnen krijgen. Kramer zal dan de komende twee seizoenen ook op de 10 kilometer gas moeten blijven geven èn op de Olympische Spelen in 2010 goud moeten pakken op de '5' en de '10'. De kans dat Gunda Niemann van de troon wordt gestoten in het Universeel Klassement is beduidend minder groot. Hoe dan ook, de dagen van Eric Heiden lijken geteld.

ALLROUNDLIJST MANNEN				
1	Eric Heiden	USA	-0.272	1979, 1978, 1980, 1976
2	Ard Schenk	NED	-0.231	1972, 1973, 1971, 1967
3	Johann Olav Koss	NOR	-0.193	1994, 1991, 1993, 1990
4	Oscar Mathisen	NOR	-0.160	1912, 1914, 1913, 1908
5	Gianni Romme	NED	-0.138	1998, 2000, 2003, 2002
6	Jaap Eden	NED	-0.134	1896, 1895, 1893, 1894
7	Hjalmar Andersen	NOR	-0.125	1951, 1952, 1950, 1954
8	Clas Thunberg	FIN	-0.102	1925, 1924, 1931, 1929
9	Ivar Ballangrud	NOR	-0.100	1930, 1936, 1926, 1938
10	Rintje Ritsma	NED	-0.047	1995, 1998, 1996, 1993
11	Ids Postma	NED	-0.007	1998, 1996, 1997, 2001
12	Kees Verkerk	NED	0.007	1967, 1969, 1966, 1968
13	Oleg Goncharenko	URS	0.013	1953, 1958, 1954, 1956
14	Sven Kramer	NED	0.020	2008, 2007, 2005, 2006
15	Bernt Evensen	NOR	0.026	1927, 1934, 1928, 1931

ALLROUNDLIJST VROUWEN				
1	Gunda Kleemann	GER	-0.391	1995, 1991, 1996, 1998
2	Karin Enke	GDR	-0.332	1986, 1987, 1984, 1980
3	Andrea Mitscherlich	GDR	-0.156	1984, 1985, 1987, 1983
4	Lidia Skoblikova	URS	-0.152	1963, 1964, 1960, 1962
5	Claudia Pechstein	GER	-0.149	2000, 1998, 1994, 2003
6	Anni Friesinger	GER	-0.108	2005, 2008, 2007, 2002
7	Inga Artamonova	URS	-0.076	1965, 1958, 1962, 1957
8	Natalya Petrusyova	URS	-0.062	1982, 1981, 1983, 1980
9	Cindy Klassen	CAN	-0.055	2006, 2003, 2005, 2007
10	Stien Kaiser	NED	-0.037	1967, 1972, 1971, 1965
11	Bonnie Blair	USA	-0.018	1994, 1992, 1988, 1986
12	Valentina Stenina	URS	-0.002	1961, 1965, 1966, 1960
13	Atje Keulen-Deelstra	NED	0.006	1973, 1974, 1972, 1970
14	Sheila Young	USA	0.009	1976, 1973, 1975, 1974
15	Yvonne van Gennip	NED	0.026	1988, 1989, 1985, 1992

Tabel 3. Universeel Klassement Top 15 Allround, mannen en vrouwen

SPRINTLIJST MANNEN				
1	Eric Heiden	USA	-0.255	1979, 1978, 1980, 1977
2	Igor Zhelezovski	URS	-0.127	1985, 1989, 1986, 1992
3	Uwe-Jens Mey	GER	-0.092	1990, 1991, 1989, 1988
4	Gaetan Boucher	CAN	-0.080	1984, 1985, 1982, 1979
5	Dan Jansen	USA	-0.042	1986, 1994, 1988, 1989
6	Jeremy Wotherspoon	CAN	-0.030	2008, 2003, 2000, 1998
7	Hiroyasu Shimizu	JPN	-0.006	1996, 2000, 1999, 1998
8	Sergey Klevchenya	URS	0.016	1996, 1994, 1997, 1995
9	Frode Rönning	NOR	0.030	1981, 1982, 1979, 1980
10	Valeri Muratov	URS	0.034	1976, 1973, 1972, 1970
11	Peter Mueller	USA	0.061	1976, 1977, 1979, 1974
12	Jan Bos	NED	0.063	1999, 2000, 1998, 2008
13	Akira Kuroiwa	JPN	0.084	1987, 1983, 1986, 1988
14	Sergey Khlebnikov	URS	0.086	1982, 1984, 1981, 1980
15	Erben Wennemars	NED	0.091	2003, 2004, 1998, 2002

SPRINTLIJST VROUWEN				
1	Karin Enke	GDR	-0.238	1986, 1987, 1984, 1980
2	Bonnie Blair	USA	-0.214	1994, 1987, 1989, 1990
3	Natalya Petrusyova	URS	-0.154	1982, 1980, 1983, 1981
4	Christa Rothenburger	GDR	-0.143	1989, 1988, 1986, 1984
5	Catriona LeMay	CAN	-0.106	1998, 2002, 2001, 1999
6	Sheila Young	USA	-0.102	1973, 1976, 1975, 1981
7	Monique Garbrecht	GER	-0.069	2001, 2003, 2000, 2002
8	Leah Poulos	USA	-0.024	1976, 1979, 1980, 1977
9	Qiaobo Ye	CHN	0.015	1992, 1993, 1991, 1994
10	Angela Stahnke	GDR	0.034	1990, 1989, 1985, 1994
11	Sabine Volker	GER	0.041	2001, 2002, 1997, 1999
12	Franziska Schenk	GER	0.064	1997, 1994, 1998, 1995
13	Atje Keulen-Deelstra	NED	0.097	1973, 1970, 1972, 1974
14	Sylvia Burka	CAN	0.099	1977, 1979, 1976, 1973
15	Monika Pflug	FRG	0.120	1972, 1973, 1981, 1982

Tabel 4. Universeel Klassement Top 15 Sprint, mannen en vrouwen

Literatuur

S.M. Berry, S.C. Reese, P.D. Larkey (1999), Bridging Different Eras in Sports, *Journal of the American Statistical Association* 94, pp. 661-687.

D. Heuvelman, F. van Schoonderwalt, G. Sierksma (2007), *Tour de France top 100*, Tirion Sport

R.H. Koning (2005), Home Advantage in Speed Skating: Evidence from Individual Data, *Journal of Sports Sciences* 23, pp. 417-428.

G.H. Kuper, E. Sterken (2002), Endurance in Speed Skating: The Development of World Records, *European Journal of Operational Research* 148, pp. 293-301.

R.T. Stefani (1997), Survey of the Major World Sports Rating Systems, *Journal of Applied Statistics* 24, pp. 635-647.

G. Sierksma, H. Snoep (2008), *Schaatsen top 100*, Tirion Sport.

Gerard Sierksma is hoogleraar kwantitatieve logistiek aan de Rijksuniversiteit Groningen.
E-mail: g.sierksma@rug.nl
Bertus G. Talsma is Ph.D. student aan de Rijksuniversiteit Groningen.
E-mail: b.g.talsma@rug.nl

Stefan Holm. Foto: Frans Bosch

TIENKAMP: EEN KWESTIE VAN BALANS

Atletiekcoaches hebben vaak veel tijd nodig voor het maken van de jaarlijkse trainingsschema's voor hun atleten. In dit artikel beschrijven we de resultaten van een case-study over de periodisering van het trainingsjaar voor tienkampers. De studie is uitgevoerd in samenwerking met voormalig KNAU-bondscoach Vince de Lange.

Gerard Sierksma en Yori Zwols

De tienkamp, of de decatlon, is een atletiekwedstrijd over tien wedstrijdonderdelen, verdeeld over twee dagen. Hiervan bestaat de eerste dag uit 100 meter hardlopen, verspringen, kogelstoten, hoogspringen en 400 meter hardlopen. Op de tweede dag wordt de wedstrijd voortgezet met 110 meter hordelopen, discuswerpen, polsstokhoogspringen, speerwerpen en 1500 meter hardlopen. Voor elk onderdeel worden punten toegekend en degene met het hoogst totaal aantal punten is de winnaar.

Het evenement vindt zijn oorsprong in de Griekse oudheid. In die tijd is de pentatlon het hoogtepunt van de Olympische Spelen en staat de vijfkampatleet symbool voor het Griekse ideaalbeeld van de gebalanceerde man die op alle vlakken uitblinkt. De pentatlon bestaat uit de onderdelen verspringen, discuswerpen, speerwerpen, hardlopen en worstelen, die in de Griekse tijd naakt worden uitgevoerd. In 1912 wordt de atletiekmeerkamp in de vorm van de tienkamp tijdens de Spelen van Stockholm opnieuw een

Olympische sport. Door een uitbreiding van het aantal onderdelen wordt niet alleen, zoals bij de Grieken, de snelheid en kracht van de atleten gemeten, maar spelen ook techniek en uithoudingsvermogen nu een grote rol.

Schaarse trainingstijd

Omdat tienkampers te maken hebben met uiteenlopende sporten is het plannen van de trainingen een ingewikkelde bezigheid. Hoe verdeel je de beschikbare tijd over de verschillende onderdelen? Aan de ene kant zou een atleet zijn sterke punten hard moeten trainen, omdat daar zijn concurrentievoordeel ligt, maar aan de andere kant weet iedereen dat hoe beter je bent, hoe moeilijker het is nog verder te verbeteren. Daarnaast zijn er meerdere soorten trainingsoefeningen, namelijk technische die vooral de motoriek van de atleet verbeteren en conditionele die de spiermassa vergroten en de conditie verbeteren. Ook dan rijst de vraag: hoe verdeel je de beschikbare tijd over de twee groepen oefeningen?

In [5] geven we een wiskundig model dat ondersteuning biedt bij het beantwoorden van deze vragen. In het huidige artikel houden we ons bezig met een ander aspect van de trainingsplanning. Naast het verdelen van de beperkte trainingstijd over de tien onderdelen, is het namelijk ook van belang die tijd over het jaar te verdelen. Het is bijvoorbeeld niet effectief alle trainingen gelijkmatig over het jaar uit te smeren. Het is beter het jaar in te delen in perioden en binnen die perioden de trainingen te variëren.

De variatie betreft dan met name de *omvang* van de trainingen en de *intensiteit* waarop getraind wordt. De trainingsomvang is een maat voor de duur van de training en het aantal malen dat een oefening herhaald wordt. Een voorbeeld van een trainingsonderdeel met een kleine omvang is vijf maal 60 meter sprinten, terwijl tien maal 60 meter sprinten een grote omvang heeft. Bij intensiteit gaat het om het energieverbruik. Vijf maal 60 meter sprinten kun je bijvoorbeeld op 80% of op 100% afwerken. Vanzelfsprekend zijn de waarden van omvang en intensiteit sterk atleetgebonden.

De kernvraag luidt: hoe kunnen we het trainingsjaar van een tienkamper zodanig periodiseren dat de trainingstijd optimaal benut wordt, en tegelijkertijd de kans op blessures minimaal blijft. Hierbij verstaan we onder een periodisering een plan van aanpak dat bestaat uit een wekelijks voorgeschreven trainingsomvang en -intensiteit. De modellen in dit artikel zijn gebaseerd op die uit [2].

Trainingsdoelstellingen

Voordat we kunnen spreken van een optimale voorbereiding moeten de doelen die atleet en coach nastreven worden gedefiniëerd. Hoewel we er van uitgaan dat dit jaarlijkse doelstellingen zijn, kunnen zij ook de langere termijn betreffen, zoals het bereiken van de komende Olympische Spelen.

Een trainingsjaar loopt doorgaans van oktober tot september, waarbij tijdens het eerste deel, van oktober tot ongeveer maart, de trainingen en wedstrijden indoor plaatsvinden. Omstreeks maart begint het buitenseizoen, waarin ook de belangrijke wedstrijden plaatsvinden. Aan het begin van het seizoen stelt de coach een lijst samen met wedstrijden waaraan de atleet gaat deelnemen. Atleten die zich nog moeten kwalificeren voor de Olympische Spelen doen altijd mee aan de wereldkampioenschappen tienkamp. Daarnaast zijn er wedstrijden die bijvoorbeeld vanwege sponsorverplichtingen ingepland zijn. Gedurende het jaar werkt de atleet toe naar de ingeroosterde wedstrijden. De jaarplanning wordt op die wedstrijden afgestemd.

Gezien de doelstellingen van de atleet zijn niet alle wedstrijden even belangrijk en sommige wedstrijden zijn niets anders dan trainingen. In Tabel 1 hebben we het wedstrijdschema van een Olympische atleet en de bijbehorende wegingsfactoren weergegeven. De wegingsfactoren lopen uiteen van een A voor een zeer belangrijke wedstrijd tot een E voor een relatief onbelangrijke wedstrijd.

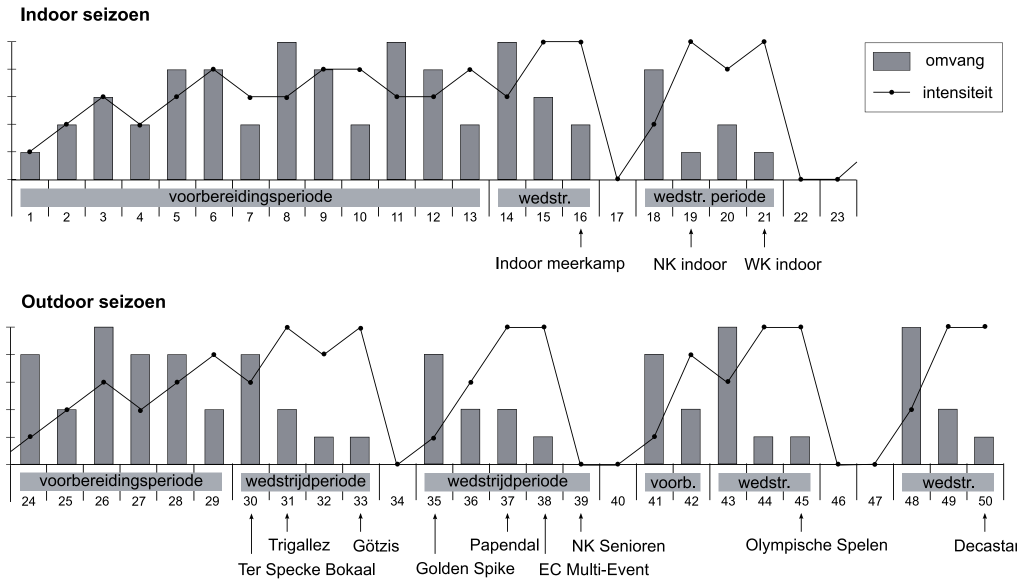
Periodisering: omvang, intensiteit en blessures

In de standaard trainingsleer (zie [1], [3], [4]) is het gebruikelijk het trainingsjaar in te delen in één of meer 'grote' cycli, die zelf ook weer bestaan uit kleinere cycli. Een grote cyclus begint met een *voorbereidingsperiode*, waarin de atleet conditie opbouwt en de techniek traint. De nadruk tijdens zo'n periode ligt op de omvang en niet zo zeer op de intensiteit. Pas aan het einde van de voorbereidingsperiode wordt de intensiteit opgeschroefd. In de laatste week van de voorbereidingsperiode, de zogenaamde *voorwedstrijdweek*, wordt de intensiteit tijdelijk verminderd en wordt er op maximale omvang getraind.

De voorwedstrijdweek luidt de *wedstrijdperiode* in, waarin er gepresteerd moet worden. De atleet traint tijdens deze periode met een hoge intensiteit. Hoeveel er precies getraind wordt hangt af van het belang van de wedstrijden, waarbij, zoals gezegd, minder belangrijke wedstrijden als training kunnen fungeren. Aan het eind van de wedstrijdperiode wordt er doorgaans een *overgangsperiode* ingelast van één of twee weken, waarin rust en herstel centraal staan. Deze periode komt bij voorkeur meteen na een zware wedstrijd. Als er twee zware wedstrijden dicht na elkaar gepland staan valt de overgangsperiode na de tweede wedstrijd.

WEEK	DATUM	OMSCHRIJVING	WEGINGSFACTOR
INDOOR			
16	31 jan	Indoor meerkamp interland, Zuidbroek	B
19	21 feb	NK indoor senioren/junioren B, Gent	C
21	7 mrt	WK indoor, Boedapest	B
OUTDOOR			
30	8 mei	Ter Specke Bokaal, Lisse	E
31	15 mei	Trigallez Recordwedstrijden, Hoorn	E
33	29 mei	Hypo-Meeting Götzis	A
35	12 jun	Golden Spike, Leiden	E
37	23 jun	Papendal Games	E
38	3 jul	EC Multi-Event Super League/1st League, Hengelo	B
39	10 jul	NK senioren, Utrecht	C
45	29 aug	Olympische Spelen, Athene	A
50	18 sep	Decastar, Talence	B

Tabel 1: Wedstrijdschema met wegingsfactoren. (De weken worden geteld vanaf het begin van het seizoen, d.w.z. week 1 is de eerste van het trainingsseizoen).

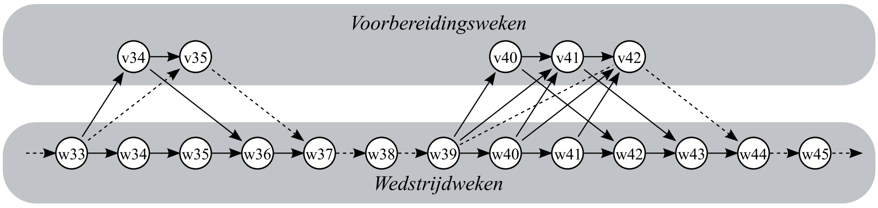


Figuur 1: Een mogelijke periodisering

Om optimaal te presteren worden de grote cycli opgedeeld in kleinere cycli van twee tot drie weken. Elke kleine cyclus begint met een grote training en in de twee tot drie weken die volgen wordt de omvang langzaam afgebouwd. In verband met wedstrijden is het echter niet altijd mogelijk precies aan deze regel te voldoen. Een andere uitzondering op de regel is het begin van het jaar, waarin omvang en intensiteit geleidelijk opgebouwd moeten worden. Om het risico op blessures zo klein mogelijk te houden dient met een aantal specifieke beperkingen rekening te worden gehouden. Het is bijvoorbeeld niet verstandig om in één week zowel de omvang als de intensiteit op een hoog niveau in te plannen. Daarnaast is het evenmin verstandig om de intensiteit van de training snel te laten toenemen. Bovendien kan drie weken achtereen trainen op een hoge intensiteit tot overtraining leiden met alle nare gevolgen van dien.

Modelleren en oplossen

Het periodiseringsmodel bestaat uit twee fasen. De eerste fase verdeelt het jaar in voorbereidingsperioden en wedstrijdperioden. De tweede fase neemt de indeling uit de eerste fase over en voegt hier de trainingsomvang en -intensiteit aan toe. Het trainingsjaar is in 50 weken verdeeld. Voor elk van deze weken stellen we de omvang en de intensiteit vast, beide uitgedrukt op een schaal van 1 tot 5. Om alvast een idee te geven hoe zo'n periodisering eruit ziet verwijzen we naar Figuur 1.



Figuur 2: Periodisering als kortste-pad probleem. Deze figuur beeldt een deel (weken 30 t/m 45) van de gerichte graaf af die gebruikt wordt in de eerste fase.

Eerste Fase

We gebruiken de voorbereidingsperiode als uitgangssituatie. Omdat er wedstrijden op de planning staan, moet de atleet af en toe vanuit die uitgangssituatie door een *wedstrijdblok*. Zo'n blok bestaat uit een voorwedstrijdweek, een wedstrijdperiode en een overgangsperiode. We stellen de 'harde' eis dat elke wedstrijd in een wedstrijdblok valt. Daarnaast kennen we 'zachtere' eisen, zoals de mogelijkheid dat een overgangsperiode korter is dan twee weken. Overschrijding van de twee-wekeneis levert in het model 'strafpunten' op. Omdat de voorbereidingsperiode het grootste trainingsrendement oplevert, proberen we zoveel mogelijk weken als voorbereidingsweken te gebruiken. We willen daarom de wedstrijdblokken zodanig over het jaar verdelen dat het aantal voorbereidingsweken zo groot mogelijk is, maar tegelijkertijd het aantal strafpunten minimaal is. Dit probleem is als een kortste-pad probleem gemodelleerd. In Figuur 2 is een deel van de onderliggende graaf weergegeven corresponderend met het wedstrijdschema van Tabel 1. De gestippelde pijlen vormen een (suboptimaal) pad. Hierin is week 33 een wedstrijdweek. De pijl w33 → v35 betekent dat 34 overgangsweek is en 35 voorbereidingsweek. De pijl v35 → w37 betekent dat 36 voorwedstrijdweek is en 37 wedstrijdweek. Merk op dat de pijl w33 → v35 strafpunten oplevert, maar de pijl w39 → v42 niet. Het vinden van een kortste pad van het meest linkse punt naar het meeste rechtse is nu equivalent met het vinden van een periodisering waarin zowel het aantal wedstrijdweken als het aantal strafpunten zo klein mogelijk is. Na het oplossen van het model kan de coach knelpunten in de periodisering vaststellen door te kijken naar de pijlen waarvoor strafpunten gerekend worden. Indien gewenst kan dan het wedstrijdschema aangepast worden om zo tot een betere periodisering te komen.

Tweede Fase

Op basis van de periodisering van fase 1 maken we een planning voor de trainingsomvang en -intensiteit. Omdat de nadruk tijdens een voorbereidingsperiode op de trainingsomvang ligt, proberen we deze tijdens de voorbereidingsperiode te maximaliseren, terwijl we tijdens wedstrijdperioden de intensiteit maximaliseren. Tegelijkertijd proberen we zoveel mogelijk de kleine cycli van afnemende omvang vast te houden en de blessurerisico's te beperken. Dit model wordt beschreven als een geheeltallig programmeringsprobleem. Hoewel geheeltallig programmeren behoort tot de klasse van moeilijke problemen (NP-hard), is ons model vanwege het relatief kleine aantal variabelen in de praktijk eenvoudig op te lossen met gebruikelijke computersoftware.

Resultaten

Zoals gezegd is in Figuur 1 de periodisering voor de Olympische atleet weergegeven. Hierin is in de eerste dertien weken van het seizoen goed te zien dat de omvang in cycli van drie weken wordt gevariëerd. Waar dit mogelijk is wordt deze trend vastgehouden, maar in de weken 15 t/m 21 en in de weken 41 t/m 45 is gekozen voor een combinatie met kortere cycli van twee weken. In de lange voorbereidingsperioden wordt de intensiteit steeds geleidelijk opgevoerd. Ook is goed te zien hoe de intensiteit vlak voor belangrijke wedstrijden vanaf een laag niveau opgebouwd wordt tot het hoogste niveau, zodat de atleet piekt op het juiste moment.

Scenarioanalyses

Het hierboven beschreven model sluit aan bij ons eerdere model in [5], dat zich bezighoudt met de vraag hoe de beperkte beschikbare tijd van de atleet zo efficiënt mogelijk gebruikt kan worden voor de training van de uiteenlopende trainingsonderdelen. In [5] is de periodisering en de beschikbare trainingstijd als gegeven verondersteld. Omdat de rekentijden van de hierbeschreven (wiskundige) modellen zeer klein zijn, is het mogelijk om snel verschillende alternatieven door te rekenen. In Figuur 1 is bijvoorbeeld te zien dat zowel het Europees Kampioenschap in week 38 op de planning staat als het Nederlands Kampioenschap voor senioren in week 39. We hebben de planning doorgerekend zowel met als zonder het NK. Op basis van de resultaten en rekening houdend met de Olympische Spelen van zes weken later, heeft de coach besloten de atleet niet aan de Nederlandse Kampioenschappen mee te laten doen.

Conclusies

Het model biedt de tienkampcoach een gestructureerde methode om het trainingsjaar van zijn pupillen te periodiseren. Periodiseren betekent altijd het balanceren van meerdere vuistregels. Aan de ene kant moet de atleet op het juiste moment pieken, aan de andere kant loert het gevaar van overtraining met als gevolg daarvan het ontstaan van blessures. In combinatie met het model beschreven in [5] biedt ons systeem de coach de mogelijkheid snel alternatieve trainingsschema's door te rekenen en het ondersteunt hem daardoor dus in het evalueren van keuzes aangaande de periodisering. Daarnaast wordt de coach, zoals in veel beslissingsondersteunende systemen, gedwongen zijn kennis en intuïtie zodanig te structureren dat deze geschikt is als input voor de computermodellen. Dit heeft als neveneffect dat de coach goed moet nadenken over zijn keuzes. Op de vraag aan coach De Lange of de hier gepresenteerde modellen hem helpen bij het plannen van zijn trainingen antwoordde hij: 'Het maken van trainingsplanningen kostte altijd veel tijd. Nu heb ik meer tijd beschikbaar voor de atleten'.

Dankwoord
Wij danken Vince de Lange voor zijn expertise en het leveren van de tienkampdata.

LITERATUUR

1. U. Jonath, E. Haag, en R. Krempel. *Atletiek: training, techniek, tactiek*. Elmar B.V, Rijswijk, 1977.
2. W.B. Lang. *Computer Support for Decathlon Training*. Afstudeerscriptie, Rijksuniversiteit Groningen, 2004.
3. L.P. Matwejew. *Die Periodisierung des sportlichen Trainings*. Leistungssport 2, pages 401–409, 1972.
4. L.P. Matwejew. *Grundlagen des sportlichen Trainings*. Sportverlag, Berlin, 1981.
5. Y. Zwols en G. Sierksma. *Training Optimization for the Decathlon*. Operations Research, 2009.

GERARD SIERKSMA is hoogleraar kwantitatieve logistiek aan de Rijksuniversiteit Groningen. E-mail: g.sierksma@rug.nl
YORI ZWOLS *is een Ph.D. student aan het Department of Industrial Engineering and Operations Research van Columbia University. E-mail: yz2198@columbia.edu*

Lijfrentes in de zeventiende en achttiende eeuw

Jan P. Hogendijk

Mathematisch Instituut,
Universiteit Utrecht en Universiteit Leiden

Geld speelt in de geschiedenis van de wiskunde een belangrijke rol. In de Renaissance bleken de Hindu-Arabische cijfers het beste systeem te zijn voor het rekenen met grote sommen geld, en sindsdien worden deze cijfers in de Westerse cultuur gebruikt. In de eeuwen daarna leidden geldzaken tot interessante problemen, die met wiskunde doeltreffender opgelost konden worden dan zonder wiskunde. De berekening van lijfrentes is hiervan een mooi voorbeeld. In ons verhaal zullen we de nadruk leggen op bijdragen van Nederlandse wiskundigen.

Vanaf de veertiende eeuw probeerden overheden (provincies, steden enz.) in het huidige Nederland en Vlaanderen aan geld te komen door het van hun onderdanen te lenen. Voor het lenen van het geld betaalden de overheden een vergoeding. Daarbij waren twee systemen in gebruik.

1. In het systeem van "losrentes" betaalde de overheid elk jaar een constant rentepercentage, bijvoorbeeld 4 procent, op het geleende kapitaal. Om een jaarlijkse uitkering van 1000 gulden rente te krijgen moet een onderdaan, die we in de rest van het verhaal Jantje zullen noemen, dus 25.000 gulden aan de overheid uitlenen. Dit systeem was ook in de handel gebruikelijk. Het feit dat deze rente elk jaar weer betaald moest worden, werd als een nadeel gezien, dat ondervangen kon worden door elk jaar ook een deel van het kapitaal af te lossen. Dit leidt tot een aardig wiskundig probleem, dat aan het eind van de 16e eeuw werd opgelost. Als de rentestand vier procent is, en de overheid 40 jaar lang een rente en aflossing van totaal 1000 gulden uitbetaalt, waarna het beginkapitaal helemaal afgelost is, hoeveel was dan dit beginkapitaal, als we uitgaan van samengestelde interest? De oplossing berust op de volgende gedachte: als de overheid over één jaar een uitkering van 1000 gulden moet uitbetalen, en de rente is 4 procent, dan moet daar nu 100/104 maal 1000 gulden voor beschikbaar zijn. Over twee jaar moet weer 1000 gulden worden betaald: om dat mogelijk te maken moeten we nu $(100/104)^2$ maal 1000 gulden hebben. Alle uitkeringen samen zijn mogelijk als Jantje nu een beginkapitaal verschaft van c maal 1000 gulden met $c = (100/104)+(100/104)^2+\ldots+(100/104)^{40}$, dat is afgerond 19.793 gulden. Dit bedrag kunnen wij gemakkelijk uitrekenen met de somformule voor een meetkundige reeks, in moderne notaties $c = (x - x^{41})/(1 - x)$ met $x = 100/104$. Aan het eind van de zestiende eeuw was deze methode wel beschikbaar in sommige boeken (bijvoorbeeld de *Elementen* van Euclides), maar lang niet bij alle rekenmeesters bekend, en meestal werden de 40 machten gewoon uitgerekend

en gesommeerd. Ook werden er tabellen aangelegd met de resultaten van zulke berekeningen, die eventueel als bedrijfsgeheim werden beschouwd. Om een eind te maken aan dit soort praktijken publiceerde Simon Stevin (1548–1620) in 1582 rentetabellen, en andere wiskundigen zijn hem gevolgd.[1]

2. Wiskundig nog interessanter is het tweede systeem dat door overheden gebruikt werd om geld te lenen: de lijfrente. Jantje legde een beginkapitaal in en wees iemand aan ('het lijf'), meestal een jong kind. De overheid betaalde dan rente aan Jantje of zijn nabestaanden zolang het lijf leefde. Men kon tegen een hogere inleg ook lijfrentes sluiten op twee lijven: de rente liep dan door totdat beide lijven waren overleden. Het systeem van lijfrentes leek aantrekkelijk voor Jantje, omdat hij een hogere rente ontving, en ook voor de overheden, omdat op een gegeven moment de verplichtingen ophielden.

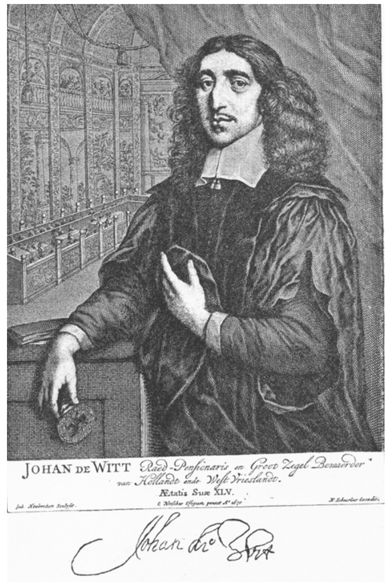
In het begin werd het verband tussen inleg en uitkering bepaald met nattevingerwerk. Meestal was de inleg veel te laag, met als gevolg dat de overheden op langere termijn in grote financiële problemen kwamen. Het was een normale zaak om met 10.000 gulden inleg (op één lijf) een jaarlijkse lijfrente van 1000 gulden te krijgen. Vanaf 1670 werd over dit onderwerp gecorrespondeerd door Christiaan Huygens (1629–1695), Johannes Hudde (1628–1704), en de eerste hoofdpersoon van dit verhaal: Jan de Witt (1625–1672), sinds 1653 raadspensionaris van Holland.

De oudste theoretische berekening van lijfrentes is Jan de Witt's pamflet *Waerdije van lijfrenten naar proportie van Los-renten*, dat in 1671 werd geschreven. De aanleiding was dat de Verenigde Nederlanden veel geld nodig hadden omdat er oorlog dreigde. Daarom werd overwogen om lijfrentes uit te geven, en de vraag was wat het tarief moest zijn. Ik zal de methode van Jan de Witt uitgebreid behandelen omdat deze niet zo moeilijk is en er tegelijk een groot deel van de noodzakelijke theorie in voorkomt. Zijn pamflet is in de zeventiende eeuw niet wijd verspreid, maar was in de achttiende eeuw wel bekend onder deskundigen. Het is in 1879 gepubliceerd als feest-uitgave van het Wiskundig Genootschap.[2] De Witt gaat uit van de volgende aannames: Jantje wil op het lijf van een kind dat nu precies 3 jaar wordt, een lijfrente sluiten die per jaar 1.000.000 gulden uitkering oplevert, uit te keren in twee halfjaarlijkse termijnen (zoals destijds gebruikelijk was). Deze 1.000.000 gulden is natuurlijk geen realistisch bedrag, maar dient om straks een nauwkeurige berekening te maken, zonder met kommagetallen te werken. Verder neemt De Witt aan dat de 'gewone' rente (de losrente) 4 procent is. Als Jantje 25.000.000 gulden zou inleggen,[3] zou de jaarlijkse uitkering van 1.000.000 gulden eeuwig kunnen doorgaan. Voor de lijfrente zal Jantje dus in elk geval minder hoeven te betalen dan 25.000.000 gulden.

[1] Zie C.M. Waller Zeper, *De oudste interesttafels in Italië, Frankrijk en Nederland met een herdruk van Stevin's "Tafelen van Interest",* Amsterdam 1937.

[2] *Feest-Gave van het Wiskundig Genootschap te Amsterdam . . . ter gelegenheid der viering van zijn honderdjarig bestaan.* Haarlem: Joh. Enschedé en zonen, 1879.

[3] Dit bedrag is nodig bij een jaarlijkse betaling: de lezer wordt uitgenodigd zelf na te gaan dat voor twee halfjaarlijkse betalingen van 500.000 gulden een beginkapitaal van 25.247.549 gulden nodig is.



Jan de Witt

Als het kind $3\frac{1}{2}$ jaar geworden is, moet er 500.000 gulden, dat is 10.000.000 stuivers, worden uitgekeerd. Dit leidt meteen tot een interessante vraag: Hoeveel geld moeten we nu op rente zetten om over een half jaar 10.000.000 stuivers te kunnen uitkeren, bij een rente van 4 procent per jaar? Men zou kunnen zeggen: 4 procent per jaar is 2 procent per half jaar, dus het benodigde bedrag is 100/102 maal 10.000.000 stuivers = 9.803.921 stuivers. Sinds het eind van de zestiende eeuw was al bekend dat dit antwoord fout is als men met samengestelde interest rekent, omdat $\frac{102}{100}$ maal $\frac{102}{100}$ niet hetzelfde is als $\frac{104}{100}$. Het goede antwoord is $\sqrt{\frac{100}{104}}$ maal 10.000.000 stuivers, dat is 9.805.807 stuivers. Vier procent rente per jaar blijkt ongeveer hetzelfde te zijn als 1,98 procent rente per half jaar. Voor de tweede uitkering van 10.000.000 stuivers over één jaar moeten we nu kunnen beschikken over $\frac{100}{104}$ maal 10.000.000 stuivers, dat is 9.615.385 stuivers. Om het hele eerste jaar te dekken hebben we nu dus nodig: 9.805.807 + 9.615.385 = 19.421.192 stuivers, uitgaande van de veronderstelling dat het kind op zijn of haar vierde verjaardag nog leeft. Enzovoort. Zo kunnen we uitrekenen hoeveel we nu op 4 procent rente moeten uitzetten om 10.000.000 stuivers te kunnen uitbetalen op het moment dat het kind $79\frac{1}{2}$ jaar wordt, namelijk $(\frac{100}{104})^{\frac{153}{2}}$ maal 10.000.000 stuivers. De Witt vindt hiervoor het correcte bedrag van 497.679 stuivers.

De Witt moet nu iets zeggen over de kans dat het kind op een bepaalde leeftijd overlijdt. Zijn uitleg is niet helemaal duidelijk, omdat hij geen onderscheid maakt tussen voorwaardelijke en onvoorwaardelijke kansen, maar zijn berekening komt in moderne termen neer op het volgende model. Hij neemt aan dat het kind voor zijn tachtigste verjaardag zal overlijden. Dan zal precies één van de volgende 154 gebeurtenissen optreden: 1. het kind overlijdt voordat het 3,5 jaar oud is; 2. het kind wordt 3,5 jaar oud, maar het overlijdt voordat het 4 jaar oud wordt; enz.., tot gebeurtenis 154: het kind wordt 79,5 jaar oud, maar het overlijdt voordat het 80 jaar oud wordt. De Witt kent aan elk van deze gebeurtenissen een kans toe, en hij onderscheidt daarbij vier perioden in het menselijk leven: van 3 tot 53 jaar, van 53 tot 63 jaar, van 63 tot 73 jaar, en van 73 tot 80 jaar. Als twee van de 154 gebeurtenissen in dezelfde periode liggen, is de kans erop hetzelfde. De kansen op een gebeurtenis in de achtereenvolgende perioden verhouden zich volgens De Witt als 1 : (2/3) : (1/2) : (1/3). Dit houdt in moderne termen in dat de kans op elk van de gebeurtenissen 1 tot en met 100 gelijk is aan $\frac{1}{128}$. De kans op elk van de gebeurtenissen 101 tot en met 120, 121 tot 140 en 141 tot 154 is respectievelijk $\frac{2}{384}$, $\frac{1}{256}$, en $\frac{1}{384}$.

Bij elke gebeurtenis hoort een bepaald aantal uitkeringen, en daarbij kan uitgerekend worden hoeveel geld nu nodig is om al die uitkeringen te financieren. Bij gebeurtenis 1 is nu 0 stuivers nodig, bij gebeurtenis 2 zijn 9.805.807 stuivers nodig, bij gebeurtenis 3 is dit bedrag 19.421.192, enzovoort. De Witt berekent nu in moderne termen de verwachting van het beginkapitaal dat nodig is om alle uitkeringen te financieren. Dat is de som van de producten van de kans dat een gebeurtenis optreedt maal het geld dat nu nodig is om de uitkeringen bij die gebeurtenis te financieren. Deze som is gelijk aan $\frac{1}{128}(0 + 9.805.807 + 19.421.192 + \ldots + \frac{1}{3} \cdot 479.820.563) = 40.964.113.736/128 = 320.032.139$ stuivers $= 16.001.607$ gulden. De Witt telt alle 154 getallen tussen de haakjes bij elkaar op en hij deelt de som door 128. Jantje moet dus iets meer dan 16.000 gulden inleggen om een jaarlijkse uitkering van 1000 gulden te krijgen. Dat is inderdaad minder dan bij een gewone lening tegen 4 procent rente. Bij dit alles houden we geen rekening met administratiekosten, belastingen, enz., waardoor Jantje in alle genoemde gevallen wat minder dan 1000 gulden zal kunnen ontvangen.

Voordat het werk van De Witt in juli 1671 in de Staten Generaal besproken werd, waren in april 1671 al lijfrentes uitgegeven, namelijk 700.000 gulden tegen de penning 14 voor één lijf (d.w.z. een beginkapitaal van 14.000 gulden voor een jaarlijkse uitkering van 1.000 gulden), en 300.000 gulden tegen de penning 17 op twee lijven. De Witt toonde in zijn document dus aan, dat dit een voordelige zaak was voor de lijfrenteniers, die immers zelf het lijf konden uitkiezen waarop de lijfrente gesloten werd. De overheid zou daarom op deze lijfrentes te zijner tijd verlies leiden. Destijds maakte dit weinig indruk omdat men zich in een crisissituatie bevond. In het rampjaar 1672 was nog veel meer geld nodig dan met lijfrentes binnengehaald kon worden, en daarom werden er drastischer maatregelen genomen, zoals een extra belasting. De oorlogen begonnen inderdaad, en door de verliezen die aan Nederlandse zijde werden geleden ontstond een hetze tegen de gebroeders Cornelis en Jan de Witt. Op 20 augustus 1672 werden zij gruwelijk vermoord.[4]

De rekenmethode van Jan de Witt kan ook worden gebruikt om het nood-

[4]Veel achtergrondinformatie is te vinden in *Bouwstoffen voor de Geschiedenis van de Levensverzekeringen en Lijfrenten in Nederland*. Bijeengebracht en bewerkt door de Directie van de Algemeene Maatschappij van Levensverzekering en Lijfrente gevestigd te Amsterdam. 1897, pp. 14–28.

zakelijke beginkapitaal uit te rekenen als het lijf ouder is dan 3 jaar, en als de rentestand anders is. Moderne schrijvers hebben gesuggereerd dat zijn aannames over de kans om in een bepaald jaar te sterven onrealistisch zijn,[5] en misschien gemotiveerd door de wens om een uitkomst te krijgen die niet te veel afwijkt van de gangbare praktijk en daardoor politiek acceptabel is.[6] Ik denk dat deze suggestie niet waarschijnlijk is, omdat De Witt geen illusies had over de overtuigingskracht van een wiskundige redenering op mensen zonder wiskundige scholing. Hij zegt dat "...de dagelijksche ondervindinghe openbaer maeckt, dat veele Menschen of niet genegen of niet bequaem zijn haer begrip op eenige aen een geschaeckelde, al-hoewel onfeylbare raisonnementen, soodanigh te appliceren, dat zy de kracht van de selve te rechte konnen vatten om daer door dat tot haer volkomen vergenoegen overtuycht te worden; en dat derhalve by haer de exempelen meer vermogen als alsulcke raisonnementen ..."[7] Daarom heeft hij naar eigen zeggen ook een voorbeeld doorgerekend. Zijn berekening is niet bewaard, maar we kunnen een indruk krijgen uit een soortgelijke berekening door Johannes Hudde, sinds 1672 burgemeester van Amsterdam. Tussen 1586 en 1590 waren te Amsterdam lijfrentes uitgegeven door de Regering van de Verenigde Provinciën, en Hudde had uit de registers een tabel samengesteld met de leeftijden van de (1495) lijven waarop de lijfrentes gesloten werden, en de periode dat elk lijf daarna nog leefde. De tabel is bewaard in een brief van Hudde aan Christiaan Huygens van 18 augustus 1671.[8] Hudde kon dus uitrekenen hoeveel het beginkapitaal geweest had moeten zijn om in dit geval de uitkeringen te financieren bij een rente van 4 procent. Voor de lijven van kleine kinderen bleek dit gemiddeld 18 maal de jaarlijkse uitkering te zijn. De berekening moet een gigantisch karwei geweest zijn.[9]

Ook in andere landen hield men zich in de tweede helft van de zeventiende eeuw met lijfrentes bezig. Om de kans te bepalen dat een mens in een bepaald levensjaar zou komen te overlijden, gebruikte men een sterftetafel (soms eufemistisch "tafel van levenskracht" genoemd). Een van de eerste serieuze sterftetafels is in 1662 samengesteld door John Graunt (1620–1674), op basis van gegevens over geboorte en sterfte in London.[10] Deze tafel was bekend aan Christiaan Huygens.

[5]We kunnen dit illustreren aan het volgende voorbeeld: Stel dat het lijf de leeftijd van $52\frac{1}{2}$ jaar heeft bereikt. Nu is de kans om voor de 53e verjaardag te overlijden gelijk aan $\frac{1}{29}$, dat is $\frac{1}{128}$ (de onvoorwaardelijke kans op gebeurtenis 100) gedeeld door de totale kans $\frac{1}{128} + \frac{28}{128}$ op één van de gebeurtenissen 100 tot en met 154. Als het lijf op de 53e verjaardag nog leeft, is de kans om in het eerste halfjaar daarna te overlijden $\frac{1}{42}$. Wanneer het lijf 53 jaar wordt, zou dus een plotselinge verbetering van de gezondheid optreden.

[6]Andreas Hald, *A History of Probability and Statistics and their Applications before 1750*, New York: Wiley, 1990, p. 130.

[7]Zie p. 23 van de *Feest-gave*.

[8]Zie *Oeuvres Complètes de Christiaan Huygens*, Tome septième: Correspondance 1670–1675. Amsterdam: Swets and Zeitlinger, reprint ed., 1978, tussen p. 96 en 97, zie digitale versie op http://gallica.bnf.fr. Om de tabel te zien kan men het beste eerst p. 96 of 97 opvragen en dan één pagina vooruit of achteruit bladeren.

[9]Later is opgemerkt dat deze rekenmethode van Hudde eigenlijk nog beter is dan het gebruiken van gemiddelde gegevens over sterfte van de bevolking. Mensen die een lijfrente namen, kozen daarvoor een gezond en jong lijf, zodat ze langer rente kunnen trekken, en de lijven waren daarom geen gemiddelden.

[10]Zie b.v. E.S. Pearson, *The History of Statistics in the 17th and 18th centuries*, p. 39.

Jaar	0	6	16	26	36	46	56	66	76	86
In leven	100	64	40	25	16	10	6	3	1	0

De tafel betekent dat van 100 babies gemiddeld 64 zes jaar oud zullen worden, 40 zestien jaar oud, enz. Graunt's sterftetabel was voor een groot deel giswerk omdat in London geen gegevens werden geregistreerd over de leeftijd waarop mensen stierven. De meeste leeftijden eindigen op 6 omdat men was geïnteresseerd in het aantal 'weerbare' mannen van 16 tot 56, waarvan aangenomen werd dat ze soldaat zouden kunnen worden.

Het samenstellen van een sterftetabel is niet eenvoudig. Men zou met een voldoend willekeurige populatie van, bijvoorbeeld, 1000 babies kunnen beginnen, en dan registreren hoelang elke baby leeft. Het duurt dan een eeuw totdat de sterftetabel klaar is. Daarom ging men op zoek naar populaties die min of meer constant waren (geen immigratie en geen emigratie) en waar geen bijzondere gebeurtenissen zoals oorlogen en epidemieën plaatsvonden; als men het aantal geboortes en de leeftijd van de overledenen een paar jaar lang registreert, kan men de gemiddeldes gebruiken voor een sterftetabel. In 1693 publiceerde de Engelsman Edmund Halley (1656–1742) een sterftetabel die hij op die manier had afgeleid uit bevolkingsgegevens uit de stad Wroclaw in Polen tussen 1687 en 1691. In Halley's tabel stonden voor elk jaar het aantal mensen die nog in leven waren, op de volgende manier:

Jaar	1	2	3	4	5	6	7	8	...
In leven	1000	855	798	760	732	710	692	680	...

Met zo'n tabel berekende Halley de inleg voor lijfrentes op ongeveer dezelfde manier van Jan de Witt, wiens werk hij trouwens niet kende. Als de lijfrente wordt afgesloten op de derde verjaardag van het lijf, is volgens Halley de kans dat dit kind voor de vierde verjaardag overlijdt $\frac{798-760}{798}$, tussen de vierde en de vijfde verjaardag $\frac{760-732}{798}$, enz. De berekening wordt daardoor moeizamer dan bij De Witt. Daarbij is het niet zeker dat een tabel voor Wroclaw ook gebruikt kan worden voor andere plaatsen en landen.

In 1725 vereenvoudigde Abraham de Moivre (1667–1754) de berekening door zijn aanname dat de getallen in een sterftetabel voor leeftijden boven 12 een lineaire functie van de leeftijd zijn. Dit betekent dat van een vaste beginpopulatie van lijven van twaalf jaar oud elk jaar gemiddeld hetzelfde aantal mensen zullen sterven. (Bij De Witt was dit het geval voor lijven tussen 3 en 53 jaar.) De berekening wordt nu een stuk eenvoudiger. We nemen aan dat de losrente $100i$ procent per jaar is (dus bij een rente van 4 procent is i = 0,04), en dat de maximumleeftijd ω is,[11] en dat we een populatie van lijven hebben die nu hun $\omega - n$-de verjaardag vieren, zodat ze nu nog maximaal n jaren kunnen leven tot de maximumleeftijd. Om een jaarlijkse lijfrenteuitkering van U gulden te financieren moet nu een beginkapitaal beschikbaar zijn van U

[11] De Moivre nam ook aan dat deze leeftijd 86 jaar is, dat wil zeggen dat er zo weinig mensen ouder worden dan 86 dat we hun aantal in de lijfrenteberekening kunnen verwaarlozen. Zie verder het geciteerde boek van Hald, p. 131-140, 508-525, en J. du Saar, De beteekenis van de Moivre's werk over lijfrenten voor de ontwikkeling van de verzekeringswetenschap, *Het Verzekerings-Archief* 4 (1923), 28–45.

maal $\frac{n-1}{n}x^1 + \frac{n-2}{n}x^2 + \ldots \frac{1}{n}x^{n-1}$ met $x = 1/(1+i)$. Deze reeks kan met enige algebraïsche manipulaties veel eenvoudiger geschreven worden[12] als U maal $\frac{1}{i}(1 - \frac{1+i}{ni}(1-(1+i)^{-n}))$. De formule is mooi maar door latere auteurs weinig toegepast omdat de sterftetafels niet voldoende lineair zijn.

Nicolaas Struyck

We komen nu bij de tweede hoofdpersoon van dit verhaal. Nicolaas Struyck (1687–1769) verdiende de kost als rekenmeester en onderwijzer in wiskunde en sterrenkunde te Amsterdam. Hij had een bijzondere belangstelling voor kansrekening, was goed op de hoogte van de buitenlandse literatuur op dit gebied, en had contacten met buitenlandse wiskundigen. Hij werd gekozen tot lid van de Royal Society in Londen en de Academie des Sciences in Parijs. Hij kende de sterftetabel van Halley maar besloot om zijn eigen sterftetafels samen te stellen op basis van registers over lijfrentes die in 1672–1673 en 1686–1689 in Amsterdam waren uitgegeven, toen Hudde daar burgemeester was. Struyck had gegevens over 1670 'lijven', en hij besloot om de gegevens over mannen en vrouwen apart te bekijken. Dit was nog niet door zijn voorgangers gedaan.

Struyck stelde twee tabellen samen met de leeftijden van de 794 mannen en 876 vrouwen bij het begin van de lijfrente, en het aantal jaren dat de lijven daarna nog hebben geleefd. De tabellen zijn afgedrukt in zijn *Aanhangsel op de Gissingen over den Staat van het Menschelyk Geslagt en de Uitreekening der*

[12]Stel $f(x) = x + x^2 + \ldots x^n$. Dan geldt $f(x) = (x^{n+1} - x)/(x-1)$. Nu is $\frac{n-1}{n}x^1 + \frac{n-2}{n}x^2 + \ldots \frac{1}{n}x^{n-1} = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n - \frac{x}{n}(1 + 2x + \ldots + nx^{n-1}) = f(x) - \frac{x}{n}f'(x)$. Hieruit volgt de formule met standaad rekenwerk.

Lyfrenten, dat in 1740 verschenen is.[13] In de tabel met 876 "Vrouwsperzoonen" staat dat lijfrentes zijn afgesloten op 77 lijven tussen 0 en 4 jaar, 110 tussen 5 en 9 jaar, etc. Van deze 77 meisjes tussen 0 en 4 jaar bereikten 72 de leeftijd van 5 jaar, 66 de leeftijd van 10 jaar, enz. Van de 110 meisjes tussen 5 en 9 jaar bereikten er 107 de leeftijd van 10 jaar, enz. Toen Struyck in 1738 zijn tabel opstelde waren er nog een paar 'lijven' in leven, en daarvoor heeft hij de sterfdatum geschat. Struyck geeft een soortgelijke tabel van 794 Mansperzoonen. Uit deze twee tabellen leidde hij de onderstaande sterftetabellen voor vrouwen en mannen af.

Tafel van de Mannelyke.

Jaar	Perz	Jaar	Perz	Jaar	Perz	Jaar	Perz	Jaar	Perz	Jaar	Perz
5	710	20	607	35	474	50	313	65	142	80	33
6	697	21	599	36	464	51	301	66	132	81	29
7	688	22	591	37	454	52	289	67	123	82	25
8	681	23	583	38	444	53	277	68	114	83	22
9	675	24	575	39	434	54	265	69	105	84	19
10	670	25	567	40	424	55	253	70	97	85	16
11	665	26	558	41	414	56	241	71	89	86	13
12	660	27	549	42	404	57	229	72	82	87	10
13	654	28	540	43	393	58	217	73	75	88	8
14	648	29	531	44	382	59	206	74	68	89	6
15	642	30	522	45	371	60	195	75	61	90	4
16	635	31	513	46	360	61	184	76	54	91	3
17	628	32	504	47	349	62	173	77	48	92	2
18	621	33	494	48	337	63	162	78	43	93	1
19	614	34	484	49	325	64	152	79	38	94	

[13]Ook gedrukt als p. 362–392 van de *Inleiding tot de algemeene Geografie, benevens eenige sterrekundige en andere verhandelingen*, Amsterdam: Tirion, 1740. Digitale versie op books.google.com. De geciteerde tabellen staan op pp. 363–368, 377.

Tafel van de Vrouwelyke.

Jaar	Perz	Jaar	Perz	Jaar	Perz	Jaar	Perz	Jaar	Perz	Jaar	Perz
5	711	20	624	35	508	50	373	65	205	80	55
6	700	21	617	36	500	51	362	66	194	81	47
7	692	22	610	37	492	52	351	67	183	82	40
8	685	23	603	38	484	53	340	68	172	83	34
9	679	24	596	39	476	54	329	69	161	84	29
10	674	25	588	40	468	55	318	70	150	85	24
11	669	26	580	41	459	56	306	71	140	86	20
12	664	27	572	42	450	57	294	72	130	87	17
13	660	28	564	43	441	58	282	73	120	88	14
14	656	29	556	44	432	59	271	74	110	89	11
15	652	30	548	45	423	60	260	75	100	90	8
16	647	31	540	46	414	61	249	76	90	91	6
17	642	32	532	47	404	62	238	77	81	92	4
18	636	33	524	48	394	63	227	78	72	93	2
19	630	34	516	49	384	64	216	79	63	94	1

Daarna berekende hij uit deze sterftetabellen nieuwe tabellen voor lijfrentes voor mannelijke en vrouwelijke lijven. Hieronder een uittreksel:

Leeftijd	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	...
Vrouw	1931	1840	1733	1630	1533	1438	1328	...
Man	1823	1714	1608	1504	1401	1291	1181	...

In de tabel staat in de kolommen de leeftijd van het lijf bij het begin van de lijfrente. In de tweede rij de inleg in guldens als het lijf een vrouw is, in de derde rij de inleg voor een mannenlijf, voor een jaarlijkse uitkering van 100 gulden. Struyck neemt aan dat de losrente 2,5 procent is. Het verschil in levensverwachting tussen mannen en vrouwen was in het eind van de zeventiende eeuw in Amsterdam nog niet bekend. Struyck verzucht dat "'t Schynt dat de Menschen toen liever op jonge Kinderen van de mannelyke zoort lyfrenten namen, dan op de Vrouwelyke van de zelfde ouderdom; daar nogtans het laatste voor de Koopers veel voordeeliger is." Hij vermeldt ook dat in Den Haag in 1740 lijfrentes werden uitgegeven tegen 6 ten honderd 's Jaars. Dat wil zeggen dat voor een jaarlijkse uitkering van 100 gulden en beginkapitaal van $1666\frac{2}{3}$ gulden moet worden ingelegd, en dat is dus volgens Struyck voor een lijfrentenier voordelig.

In een eerder geschriftje, de *Uitreekening van Lyfrenten* (1738)[14] behandelt Struyck een methode voor het uitrekenen van lijfrentes. Hij bespreekt eerst de methode van De Witt en vereenvoudigt zijn berekening door het handig sommeren van reeksen, zoals we hierbover hebben gezien bij De Moivre. Struyck legt de berekening van zijn eigen sterfte- en lijfrentetabellen nogal vaag uit, en er zijn diverse onduidelijkheden in de details. De lezer kan zelf de lijfrentes in Struyck's tabellen vergelijken met de benaderingsformule van De Moivre; mijn vertrouwen in de berekeningen van Struyck is door deze oefening niet toegenomen. Het zou voor een wiskundestudent een interessant scriptieonderwerp zijn, de resultaten van Struyck met moderne computerberekeningen te analyseren.

[14]Herdrukt in p. 345-360 van de *Algemeene Inleiding*, zie de vorige voetnoot.

De vaagheid van de beschrijvingen van Struyck was een welkome aanleiding voor zijn aartsvijand Willem Kersseboom (1691–1771), zelf ook een grootheid op lijfrente-gebied, om Struyck te bekritiseren. Kersseboom publiceerde zelf ook een sterftetabel, zonder onderscheid tussen mannen en vrouwen, die tot ver in de negentiende eeuw gebruikt is. Struyck reageerde niet op de kritiek, en zijn werk werd snel vergeten, maar in de twintigste eeuw is hij gerehabiliteerd.[15]

De volgende belangrijke figuur op het gebied van lijfrenteberekeningen in Nederland is Jan Hendrik van Swinden (1746-1823). Deze interesseerde zich voor sterftetafels en gebruikte ze omstreeks 1770 al bij zijn onderwijs aan de Universiteit van Franeker. Hij was niet op de hoogte van het werk van Struyck. Van Swinden werd in 1807 wiskundig adviseur bij de nieuw opgerichte "Hollandsche Societeit van Levensverzekeringen" te Amsterdam. Vanaf dat moment werden lijfrentes en soortgelijke producten in Nederland op wiskundig verantwoorde manier aangeboden. In de achttiende eeuw was dit nog lang niet altijd het geval, ook omdat te weinig mensen de noodzakelijke wiskunde beheersten In een boekje over de berekening van lijfrentes in 1775 staat de volgende verzuchting over decimale breuken: "het is jammer dat deze zo nuttige wijze van rekenen met tiendelige breuken zo weinig in zwang is; . . . niet alleen de Tafels, maar al hetgeen in deze verhandeling voorkomt, kan voor hem, die in het minste geen denkbeeld van derzelver behandeling heeft, van weinig nut zijn."[16] Behalve decimaalbreuken waren ook logarithmen essentieel om het rekenwerk binnen de perken te houden. Dat de meeste mensen "in het veld" niet bekend waren met wiskundig correcte lijfrenteberekeningen, blijkt uit de eerste van twee voor ons amusante voorbeelden, waarmee ik dit verhaal zal afsluiten. Deze voorbeelden waren wellicht voor de meeste betrokkenen wat minder amusant.

[15]Zijn werken zijn in het Frans vertaald in *Les Oeuvres de Nicolas Struyck (1687–1769), qui se rapportent au calcul des chances, à la statistique générale, à la statistique des décès et aux rentes viagères tirées des oeuvres complètes*, traduites du Hollandais par J.A. Vollgraff. Amsterdam 1912. Daarna is Struyck met Kersseboom vergeleken in M. van Haaften, *Nicolaas Struyck en zijne sterftetafels*,'s Gravenhage 1925.

[16]A. Gallas, *Kortbondige en stelkonstige Verhandeling over den aart der Lyfrenten, tontinen, Weduwenbeursen en andere Negotiatiën*, Amsterdam 1775.

Een man en vrouw komen om zich in te tekenen bij een weduwenbeurs

Het bijgevoegde plaatje is onderdeel van een publicatie over weduwenbeurzen, waarvan er in het jaar 1749 een groot aantal werd opgericht. De weduwenbeurs van Alkmaar is een interessant voorbeeld.[17] Deze werd door 9 mannen opgericht in mei 1749, en mocht maximaal 75 leden (mannen) hebben. Het entreegeld was 20 gulden, en de vaste contributie 10 gulden per jaar. Op leeftijd werd niet gelet. Als de man zou overlijden zou de weduwe in elk geval 75 gulden pensioen krijgen in de eerste jaren. Later zou dit zelfs kunnen oplopen tot 200 gulden. Deze financiële opzet doet niet erg solide aan. Met 75 leden zijn de jaarlijkse inkomsten 750 gulden, en tien weduwen zijn daarom al genoeg om de kas te ruïneren. Latere auteurs vermelden dat als een weduwenbeurs dreigde leeg te raken, de jongere leden meestal ophielden met het betalen van contributie. Als gevolg daarvan zagen veel mensen nooit iets terug van hun geld.

Het fenomeen woekerpolis was ook al bekend in de achttiende eeuw, zoals blijkt uit mijn tweede voorbeeld. Onder de naam “De tijd baard roozen” werden rond 1750 contracten aangeboden door ene Jacobus Laban te Amsterdam. Men kon deelnemen door een of meer maal 10,- te storten. Het geld werd op rente uitgezet, en de rente werd jaarlijks verdeeld onder de deelnemers die nog in leven waren, volgens een zogenaamd Tontine-systeem (naar de Italiaanse bankier Lorenzo di Tonti, die het systeem in de zeventiende eeuw in Frankrijk invoerde). Waren er deelnemers doodgegaan, dan kreeg de rest een hogere uitkering. Om dit voor alle leeftijden aantrekkelijk te houden werden de deelnemers in klassen

[17] Zie *Bouwstoffen*, p. 292–297.

van ongeveer gelijke leeftijd verdeeld. Wanneer er in één klasse nog maar één deelnemer over was, werd die (tegen betaling) in een andere klasse ingedeeld, waarin veel meer werd uitgekeerd. Laban beweerde dat men met een inleg van 10 gulden misschien wel een uitkering van 1000 gulden zou kunnen krijgen. Ging men dood, dan zagen de erfgenamen niets terug van het ingelegde geld.

Het venijn zat hem verder in de vele "kosten" die door Laban en consorten in rekening werden gebracht. Van de ontvangen rente werd een deel ingehouden, en verder werden er allerlei bedragen in rekening gebracht voor intekening, jaarlijkse administratiekosten, aankoop van obligaties, schrijfloon, enzovoort. Over het verdere verloop van dit initiatief is niets bekend maar het is aan te nemen dat het niet lang heeft bestaan.[18]

De wiskundige problemen die we behandeld hebben zijn tegenwoordig nog steeds actueel. Een huis kan worden aangekocht met een hypotheek, waarbij de bank een beginkapitaal verschaft en de huiseigenaar dit gedurende 30 jaar opbrengt met een constant maandbedrag dat uit rente en aflossing bestaat. Een pensioen is een vorm van lijfrente op het lijf van de persoon zelf, waarbij de uitkering wordt uitgesteld totdat het lijf 65 jaar oud is. Tegenwoordig worden geavanceerde wiskundige methoden gebruikt bij de berekening van hypotheken en pensioenen, maar de oudere methoden die we hebben behandeld geven een goede benadering, en zijn hopelijk niet te hoog gegrepen voor geïnteresseerde middelbare scholieren in de bovenbouw. De geschiedenis van deze problemen kan hen duidelijk maken dat wiskunde niet alleen interessant is, maar dat er ook veel geld mee verdiend kan worden.

Ik dank Jantien Dopper en Steven Wepster voor het kritisch doorlezen van een eerdere versie van dit artikel.

[18]Zie *Bouwstoffen*, pp. 336–345.

CWI SYLLABI

1 Vakantiecursus 1984: *Hewet - plus wiskunde.* 1984.
2 E.M. de Jager, H.G.J. Pijls (eds.). *Proceedings Seminar 1981–1982. Mathematical structures in field theories.* 1984.
3 W.C.M. Kallenberg, et al. *Testing statistical hypotheses: worked solutions.* 1984.
4 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 1.* 1984.
5 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 2.* 1984.
6 P.J.M. Bongaarts, J.N. Buur, E.A. de Kerf, R. Martini, H.G.J. Pijls, J.W. de Roever. *Proceedings Seminar 1982–1983. Mathematical structures in field theories.* 1985.
7 Vacantiecursus 1985: *Variatierekening.* 1985.
8 G.M. Tuynman. *Proceedings Seminar 1983–1985. Mathematical structures in field theories, Vol.1 Geometric quantization.* 1985.
9 J. van Leeuwen, J.K. Lenstra (eds.). *Parallel computers and computations.* 1985.
10 Vakantiecursus 1986: *Matrices.* 1986.
11 P.W.H. Lemmens. *Discrete wiskunde: tellen, grafen, spelen en codes.* 1986.
12 J. van de Lune. *An introduction to Tauberian theory: from Tauber to Wiener.* 1986.
13 G.M. Tuynman, M.J. Bergvelt, A.P.E. ten Kroode. *Proceedings Seminar 1983–1985. Mathematical structures in field theories, Vol.2.* 1987.
14 Vakantiecursus 1987: *De personal computer en de wiskunde op school.* 1987.
15 Vakantiecursus 1983: *Complexe getallen.* 1987.
16 P.J.M. Bongaarts, E.A. de Kerf, P.H.M. Kersten. *Proceedings Seminar 1984–1986. Mathematical structures in field theories, Vol.1.* 1988.
17 F. den Hollander, H. Maassen (eds.). *Mark Kac seminar on probability and physics. Syllabus 1985–1987.* 1988.
18 Vakantiecursus 1988. *Differentierekening.* 1988.
19 R. de Bruin, C.G. van der Laan, J. Luyten, H.F. Vogt. *Publiceren met LATEX.* 1988.
20 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 1.* 1988.
21 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 2.* 1988.
22 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 3.* 1988.
23 J. van Mill, G.Y. Nieuwland (eds.). *Proceedings van het symposium wiskunde en de computer.* 1989.
24 P.W.H. Lemmens (red.). *Bewijzen in de wiskunde.* 1989.
25 Vakantiecursus 1989: *Wiskunde in de Gouden Eeuw.* 1989.
26 G.G.A. Bäuerle et al. *Proceedings Seminar 1986–1987. Mathematical structures in field theories.* 1990.
27 Vakantiecursus 1990: *Getallentheorie en haar toepassingen.* 1990.
28 Vakantiecursus 1991: *Meetkundige structuren.* 1991.
29 A.G. van Asch, F. van der Blij. *Hoeken en hun Maat.* 1992.
30 M.J. Bergvelt, A.P.E. ten Kroode. *Proceedings seminar 1986–1987. Lectures on Kac-Moody algebras.* 1992.
31 Vakantiecursus 1992: *Systeemtheorie.* 1992.
32 F. den Hollander, H. Maassen (eds.). *Mark Kac seminar on probability and physics. Syllabus 1987–1992.* 1992.
33 P.W.H. Lemmens (ed.). *Meetkunde van kunst tot kunde, vroeger en nu.* 1993.
34 J.H. Kruizinga. *Toegepaste wiskunde op een PC.* 1992.
35 Vakantiecursus 1993: *Het reële getal.* 1993.
36 Vakantiecursus 1994: *Computeralgebra.* 1994.
37 G. Alberts. *Wiskunde en praktijk in historisch perspectief. Syllabus.* 1994.
38 G. Alberts, J. Schut (eds.). *Wiskunde en praktijk in historisch perspectief. Reader.* 1994.
39 E.A. de Kerf, H.G.J. Pijls (eds.). *Proceedings Seminar 1989–1990. Mathematical structures in field theory.* 1996.
40 Vakantiecursus 1995: *Kegelsneden en kwadratische vormen.* 1995.
41 Vakantiecursus 1996: *Chaos.* 1996.
42 H.C. Doets. *Wijzer in Wiskunde.* 1996.
43 Vakantiecursus 1997: *Rekenen op het Toeval.* 1997.
44 Vakantiecursus 1998: *Meetkunde, Oud en Nieuw.* 1998.
45 Vakantiecursus 1999: *Onbewezen Vermoedens.* 1999.
46 P.W. Hemker, B.W. van de Fliert (eds.). *Proceedings of the 33^{rd} European Study Group with Industry.* 1999.
47 K.O. Dzhaparidze. *Introduction to Option Pricing in a Securities Market.* 2000.
48 Vakantiecursus 2000: *Is wiskunde nog wel mensenwerk?* 2000.
49 Vakantiecursus 2001: *Experimentele wiskunde.* 2001.
50 Vakantiecursus 2002: *Wiskunde en gezondheid.* 2002.
51 G.M. Hek (ed.). *Proceedings of the 42^{nd} European Study Group with Industry.* 2002.
52 Vakantiecursus 2003: *Wiskunde in het dagelijks leven.* 2003.
53 Vakantiecursus 2004: *Structuur in schoonheid.* 2004.
54 Vakantiecursus 2005: *De schijf van vijf – meetkunde, algebra, analyse, discrete wiskunde, stochastiek.* 2005.
55 J. Hulshof (ed.). *Proceedings of the 52^{nd} European Study Group with Industry.* 2006.
56 Vakantiecursus 2006: *Actuele wiskunde.* 2006.
57 Vakantiecursus 2007: *Wiskunde in beweging.* 2007.
58 Vakantiecursus 2008: *Wiskunde en profil – het gezicht van de wiskunde.* 2008.
59 Vakantiecursus 2009: *Tel uit je winst – wiskunde in geld en spelen.* 2009.

MC SYLLABI

1.1 F. Göbel, J. van de Lune. Leergang besliskunde, deel l: wiskundige basiskennis. 1965.
1.2 J. Hemelrijk, J. Kriens. Leergang besliskunde, deel 2: kansberekening. 1965.
1.3 J. Hemelrijk, J. Kriens. Leergang besliskunde, deel 3: statistiek. 1966.
1.4 G. de Leve, W. Molenaar. Leergang besliskunde, deel 4: Markovketens en wachttijden. 1966
1.5 J. Kriens, G. de Leve. Leergang besliskunde, deel 5: inleiding tot de mathematische besliskunde. 1966.
1.6a B. Dorhout, J. Kriens. Leergang besliskunde, deel 6a: wiskundige programmering. 1967.
1.6b B. Dorhout, J. Kriens, J.Th. van Lieshout. Leergang besliskunde deel 6b: wiskundige programmering. 1967
1.7a G. de Leve. Leergang besliskunde, deel 7a: dynamische programmering 1. 1969
1.7b G. de Leve, H.C. Tijms. Leergang besliskunde, deel 7b: dynamische programmering 2. 1970.
1.7c G. de Leve, H.C. Tijms. Leergang besliskunde deel 7e: dynamische programmering 3. 1971.
1.8 J. Kriens, F. Göbel, W. Molenaar. Leergang besliskunde, deel 8: minimaxmethode, netwerkplanning, simulatie. 1968.
2.1 G.J.R. Förch, P.J. van der Houwen, RP. van de Riet. Colloquium stabiliteit van differentieschema's deel 1. 1967.
2.2 L. Dekker, T.J. Dekker, P.J. van der Houwen, M.N. Spijker. Colloquium stabiliteit van differentieschema's deel 2. 1968.
3.1 H.A. Lauwerier. Randwaardeproblemen, deel 1. 1967.
3.2 H.A. Lauwerier. Randwaardeproblemen, deel 2. 1968.
3.3 H.A. Lauwerier. Randwaardeproblemen, deel 3. 1968.
4 H.A. Lauwerier. Representaties van groepen. 1968.
5 J.H. van Lint, J.J. Seidel, P.C. Baayen. Colloquium discrete wiskunde. 1968.
6 K.K. Koksma. Cursus ALGOL 60. 1969.
7.1 Colloquium moderne rekenmachines, deel 1. 1969.
7.2 Colloquium moderne rekenmachines, deel 2. 1969.
8 H. Bavinck, J. Grasman. Relaxatietrillingen. 1969.
9.1 T.M.T. Coolen, G.J.R. Förch, E.M. de Jager, H.G.J. Pijls. Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 1. 1970.
9.2 W.P. van den Brink, T.M.T. Coolen, B. Dijkhuis, P.P.N. de Groen, P.J. van der Houwen, EM. de Jager, N.M. Temme, R.J. de Vogelaere. Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 2. 1970.
10 l. J. Fabius, W.R. van Zwet. Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening. 1970.
11 H. Bart, M.A. Kaashoek, H.G.J. Pijls, W.J. de Schipper, J. de Vries. Colloquium halfalgebra's en positieve operatoren. 1971.
12 T.J. Dekker. Numerieke algebra. 1971.
13 F.E.J. Kruseman Aretz. Programmeren voor rekenautomaten; de MC ALGOL 60 vertaler voor de EL X8. 1971.
14 H. Bavinck, W. Gautschi, G.M. Willems. Colloquium approximatietheorie. 1971.
15.1 T.J. Dekker, P. W. Hemker, P.J. van der Houwen. Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 1. 1972.
15.2 P.A. Beentjes, K. Dekker, H.C. Hemker, S.P.N. van Kampen, G.M. Willems. Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 2. 1973.
15.3 P.A. Beentjes, K. Dekker, P.W. Hemker, M. van Veldhuizen. Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 3. 1975.
16.1 L. Geurts. Cursus programmeren, deel 1: de elementen van het programmeren. 1973.
16.2 L. Geurts. Cursus programmeren, deel 2: de programmeertaal ALGOL 60. 1973.
17.1 P.S. Stobbe. Lineaire algebra, deel 1. 1973.
17.2 P.S. Stobbe. Lineaire algebra, deel 2. 1973.
17.3 N.M. Temme. Lineaire algebra, deel 3. 1976.
18. F. van der Blij, H. Freudenthal, J.J. de Iongh, J.J. Seidel, A. van Wijngaarden. Een kwart eeuw wiskunde 1946-1971, syllabus van de vakantiecursus 1971. 1973.
19 A. Hordijk, R. Potharst, J.Th. Runnenburg. Optimaal stoppen van Markovketens. 1973.
20 T.M.T. Coolen, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, E Slagt. ALGOL 60 procedures voor begin- en randwaardeproblemen. 1976.
21 J.W. de Bakker (red.). Colloquium programma-correctheid. 1975.
22 R. Helmers, J. Oosterhoff, F.H. Ruymgaart, M.C.A. van Zuylen. Asymptotische methoden in de toe-tsingstheorie; toepassingen van naburigheid. 1976.
23.1 J.W. de Roever (red.). Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel l. 1976.
23.2 J.W. de Roever (red.). Colloquium onderwerpen uit de biomathematica. deel 2. 1977.
24.1 P.J. van der Houwen. Numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen . deel 1: eenstapsmethaden. 1974.
25 Colloquium structuur van programmeertalen. 1976.
26.1 N.M. Temme (ed.). Nonlinear analysis, volume 1. 1976.
26.2 N.M. Temme (ed.). Nonlinear analysis, volume 2. 1976.
27. M. Bakker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, S.J. Polak, M, van Veldhuizen. Colloquium discretiseringsmethoden. 1976.
28 O. Diekmann, N.M. Temme (eds.). Nonlinear diffusion problems. 1976.
29.1 J.C.P. Bus (red.). Colloquium numerieke programmatuur, deel 1A, deel 1 B. 1976.
29.2 H.J.J. te Riele (red.). Colloquium numerieke programmatuur, deel 2. 1977.
30 J. Heering, P. Klint (red.). Colloquium programmeeromgevingen. 1983.
31 J.H. van Lint (red.). Inleiding in de coderingstheorie. 1976.
32 L. Geurts (red.). Colloquium bedrijfsystemen. 1976.
33 P.J. van der Houwen. Berekening van waerstanden in zeeën en rivieren. 1977.
34 J. Hemelrijk. Oriënterende cursus mathematische statistiek. 1977.
35 P.J.W. ten Hagen (red.). Colloquium, computer graphics. 1978.
36 J.M. Aarts, J. de Vries. Colloquium topologische dynamische systemen. 1977.
37 J.C. van Vliet (red.). Colloquium capita datastructuren. 1978.
38.1 T.H. Koornwinder (ed.). Representations of locally compact groups with applications, part I. 1979.
38.2 T.H. Koornwinder (ed.). Representations of locally compact groups with applications, part II. 1979.
39 O.J. Vrieze, G.L. Wanrooy. Colloquium stochastische spelen. 1978.
40 J. van Tiel. Convexe analyse. 1979.
41 H.J.J. te Riele (ed.) Colloquium numerical treatment of integral equations. 1979.
42 J.C. van Vliet (red.). Colloquium capita implementatie van programmeertalen. 1980.
43 A.M. Cohen, H.A. Wilbrink. Eindige groepen (een inleidende cursus). 1980.
44 J.G. Verwer (ed.) . Colloquium numerical solution of partial differential equations. 1980.
45 P. Klint (red.). Colloquium; hogere programmeertalen en computerarchitectuur. 1980.
46.1 P.M.G. Apers (red.). Colloquium databankorganisatie, deel l. 1981.
46.2 P.G.M. Apers (red.). Colloquium databankorganisatie, deel 2. 1981.
47.1 P. W. Hemker (ed.). NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60: general information and indices. 1981.
47.2 P.W. Hemker (ed.). NUMAL, numerical procedures procedures in ALGOL 60, vol. I: elementary procedures; vol. 2: algebraic evaluatons. 1981.
47.3 P.W. Hemker (ed.). NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3A: linear algebra part I. 1981.
47.4 P.W. Hemker (ed.). NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol 3B: linear algebra, part II. 1981.
47.5P.W. Hemker (ed.). NUMAL, procedures in ALGOL 60, vol. 4: analytical evaluations; vol. 5A: analytical problems. part I. 1981
47.6P.W. Hemker (ed.). NUMAL, procedures in ALGOL 60, vol 5B: analytical problems, part II. 1981
47.7 P.W. Hemker (ed.). NUMAL, procedures in ALGOL 60, vol. 6: special functions and constants; vol. 7: interpolation and approximation. 1981
48.1 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 1. 1982.
48.2 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). Colloquium complexiteit en algoritmen, deel II. 1982.
49 T.H. Koomwinder (ed.) The structure of real semisimple Lie groups. 1982
50 H. Nijmeijer. Inleiding systeemtheorie. 1982.
51 P.J. Hoogendoorn (red.). Cursus cryptografie. 1983.

Centrum Wiskunde & Informatica
Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek

Centrum Wiskunde & Informatica (CWI) is het nationale onderzoeksinstituut op het gebied van wiskunde en informatica. CWI maakt deel uit van de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO).

www.cwi.nl